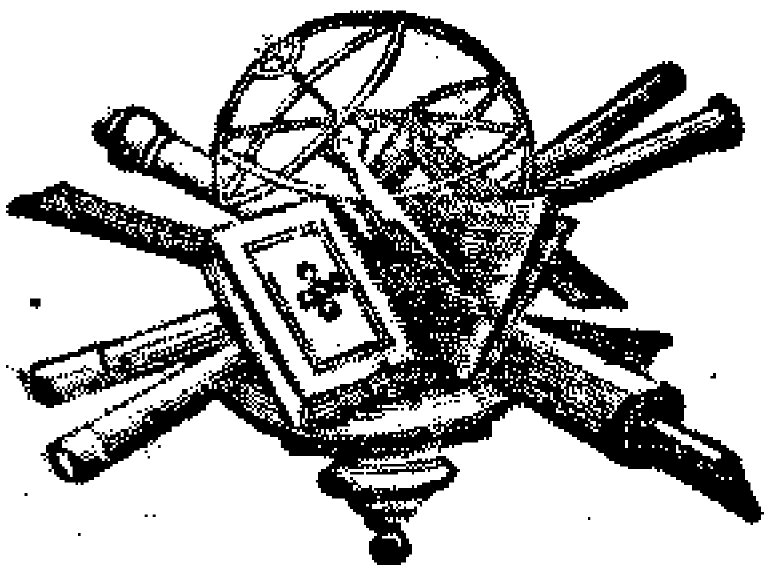
EDIZIONE NAZIONALE

MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

LA GEOMETRIA
DEL
COMPASSO
DI
LORENZO MASCHERONI.



P A V I A anno V della Repubblica Francese.

Presso gli Eredi di Pietro Galeazzi
(1797).

A BONAPARTE L' ITALICO.

Io pur ti vidi coll' invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,
Meco divider con attento guardo
Il curvo giro del fedel compasso.
E te pur vidi aprir le arcane cifre
D' ardui problemi col valor d' antico
Geometra Maestro, e mi sovvenne
Quando l' alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L' anno di tue vittorie, anno che splende
Nell' abisso de' secoli qual sole.
Segui l' impresa, e coll' invitta mano
Guida all' Italia tua liberi giorni.

ERRORI				CORREZIONI
pag.	28 lin.	2	*A*.	*Af*
		3	ragionef	ragione.
	153 lin.	3	*b e d e*	*b c d e*
	186 lin.	4	dodecadro	dodecaedro
	256 lin.	15	2849	2846
	258 lin.	15	molta	molto
				3
	260 lin.	3.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Il §. 139 è replicato due volte successivamente; ciò però non reca confusione.

PREFAZIONE

Il primo pensiero, che mi invitò a tentare le strade nuove di questa *Geometria del Compasso*, fu questo: mentre si trovano tante cose nuove progredendo nelle matematiche, non si potrebbe forse trovare qualche luogo ancora incognito retrocedendo? Finora le più semplici soluzioni della geometria sono state giudicate quelle, che altro non impiegano, che il compasso e la riga; ossia, ciò che è lo stesso, la retta, che è la più semplice tra le linee, e il cerchio, che è la più semplice fra le curve. A questi due stromenti, per così dire, de' problemi, che un tempo determinavano e costituivano la geometria elementare, furono aggiunte in progresso le curve coniche; quindi le superiori al secondo grado e le trascendenti di varie spezie. Si sono continuate ad arricchire queste profonde indagini geometriche coi nuovi soccorsi dell'algebra sì finita, che infinitesima a tale, che ormai que' ri-

trovati, i quali dapprima parvero m
ravigliosi agli antichi, e degni de' sag
fizj di Talete e di Pitagora, sono l'a
pannaggio dei fanciulli dei nostri gio
ni. Or dissi: non potresti tu ritrocede
dagli elementi, come da una linea
demarcazione, e cercar qualche cosa r
masta addietro a guisa di trascurata?
egli vero che i problemi elementari d'E
clide sieno della più semplice costruzi
ne? O non si potrebbe l' elemento m
tematico risolvere ne' suoi elementi fo
damentali riga e compasso, a guisa
chi ha separata l' acqua in due arie,
qualche aria pure stimata semplice, i
due altre sostanze? A questo punto m'a
vidi, che non potendosi far uso del
riga sola se non per condurre una retta
si poteva però forse far uso del sol
compasso non per descrivere solamen
un cerchio, o un arco d'esso; ma de
scrivendone più con più centri, e co
diverse aperture, trovare per via del
loro sezioni mutue più punti, che fos
sero utili, e appunto i cercati di posi
zione in qualche problema.

Fin quì conobbi, che questo era un ramo finora non coltivato per nulla dai matematici, e che soluzioni di simil genere ottenute per avventura col solo compasso sarebbero state per la loro costruzione più elementari di ogni altra. Ma due cose mi trattennero per poco di accingermi a tentar nulla per questa via. La prima fu il pensiero: qual pro ne verrà se tu arrivi a trovare col solo compasso que' punti, che altri hanno già finora trovati con esso e colla riga? La seconda era il timore, che da principio sembrommi ben ragionevole, che anzi che avere vantaggio da miei tentativi, fossero pure coronati dall' esito; avrei avuto discapito. Le costruzioni col solo compasso per trovare i punti della geometria elementare sarebbero state complicate a più doppj sopra le già conosciute, nelle quali interviene la riga. Avrebbe dunque la teoria mancato d'eleganza, e la pratica di precisione. Sicchè io era al procinto d'abbandonare l'impresa.

Mentre io era così irresoluto, m'accadde di rileggere la maniera colla quale

Graham, e *Bird* dividevano in Inghilterra i loro grandi quadranti astronomici (*Encyclop. Method. Articl. quart de cercle mural*). Il quadrante di *Graham* fatto da lui per Greenwich non solo si dice aver servito di modello alla maggior parte di quelli che si sono fatti dopo; ma vien considerato ancora per la sua precisione dagli astronomi per uno de' migliori, che siansi mai adoperati nell' astronomia, fino all' epoca dei quadranti di *Ramsden*. Ora vidi che la divisione di quella celebre macchina, abbandonata affatto la riga, fu eseguita col solo compasso. E' interessante la descrizione del metodo impiegato in quella lunga ed ingegnosa operazione. Io non entrerò quì a dire le ragioni, per le quali la riga ne fu esclusa. Le indovineranno facilmente tutti quelli, che hanno perizia di simil genere di lavori. Per accennare in generale i vantaggi, che ha il compasso sopra la riga, qualora si tratti di una descrizione precisa di linee, che non debbano temere l'esame del microscopio, basta avvertire, che trattandosi specialmente d' una riga alquanto lunga, è quasi impossibile ch' ella sia così dritta, che ne garantisca per tutto il suo tratto della posizione a luogo de' punti, che in essa sono. E sia pur essa rettissima. Sanno i pratici, che il dovere strisciare lungo essa colla punta che segna, porta seco una incertezza di parallelismo nel moto dell' asse di questa punta, o di perfetto adattamento allo spigolo, che rende spesso inutile la sua massima perfezione. A queste due difficoltà non va soggetto il compasso. Qualora esso sia fermo nell' apertura, e finissimo nelle punte; centratane una immobilmente, il che non è difficile, l' altra scorrendo segna da se un' arco così preciso ed esatto, che nulla più.

Nel leggere quella descrizione avvertii, che *Graham* ebbe quattro incomodi. Il primo fu che dovette operare per via di tentativi. Prescindendo dall' arco di sessanta gradi che fu da lui determinato col raggio del cerchio; tutte le sue soddivisioni furono eseguite tentando. Gli antichi non hanno somministrato mezzo di dividere la circonferenza di un cerchio col solo compasso, altro che in sei; questo viene esposto e dimostrato nella proposizione decimaquinta del libro quarto d'Euclide. Non potè dunque *Graham* ottenere precisione geometrica fuorchè in un punto.

Il secondo incomodo fu la perdita di tempo, che necessariamente si consuma anche dai più abili nei tentativi.

Il terzo fu l'aver dovuto impiegare due piani; uno, sul quale fare le prove; l'altro, sul quale trasportarne i risultati, che era lo stesso piano del quadrante. Ciò si fece da lui per non guastare colle prove sul quadrante la superficie del lembo.

Il quarto fu l'aver dovuto eseguire due divisioni di diverse specie. Siccome la divisione del quadrante in novanta gradi portava seco le soddivisioni di un arco in tre, e in cinque parti, e i tentativi di queste soddivisioni riuscivano imperfetti per la troppa accumulazione di errori; si volle da lui eseguire un'altra divisione del quadrante stesso accanto alla prima, la quale non procedesse, che per via di bissezioni. Diviso dunque l' arco di sessanta gradi in due parti, ed avuto l' arco di trenta, e quindi il quadrante diviso in tre parti; colle soddivisioni per due si ebbe in seguito la sesta, quindi la duodecima parte ecc. fino a che tutto il quadrante restò diviso in parti novantasei. Essendo questa la divisione, che meritava più fiducia; l' altra divisione in novanta gradi, che era pur quella che doveva immediatamente servire agli astronomi, si confrontò e si corresse sopra questa via d' una tavola calcolata all' uopo.

Tutti questi inconvenienti furono forse la cagione per la quale *Bird* si appigliò ad un altro metodo per dividere i suoi quadranti. Egli determinava gli archi per via delle loro corde, che prendeva sopra una scala di parti eguali. Ma nemmeno questa seconda maniera è libera d' imperfezioni; poichè in primo luogo manca di precisione geometrica; ed in secondo luogo trasporta sul quadrante le inesattezze, che trovar si potessero nella scala.

La considerazione dell' importanza degl' istromenti astronomici mi richiamò la mente a guardare il mio progetto della *Geometria del Compasso* sotto un punto di vista più favorevole. Cominciai a credere, che avrei fatto molto se avessi potuto dividere la circonferenza col solo compasso in più parti, che in sei. Quanto piu avanti avessi potuto spingere la soddivisione, e quanto più questa fosse stata concorde colla divisione del quadrante in novanta gradi; tanto maggior servizio avrei prestato agli artefici d' astronomia. Avrei procurato loro la precisione geometrica; avrei risparmiato loro il tempo de' tentativi, il doppio genere di divisioni, la necessità di due piani, e l' uso non affatto sicuro, e non geometrico delle scale.

Mi restava solo il timore, che anche trovandosi per avventura questo nuovo metodo, non riuscisse poi complicato, e lungo a segno di non essere più abbastanza opportuno per l' uso. M' accinsi all' opera. Vedendo che l' applicazione dell' algebra alla geometria non m' assistiva molto in simil genere di ricerche; m' aggirai per altre strade quasi semplicemente geometriche, che io quì indicherei se giovasse; ma siccome io non ho tenuto gran fatto una traccia costante nel mio cammino, e devo molto all' accidente, che dopo varj andirivieni di ripieghi diversi, m' ha presentato, e non sempre così prontamente il risultato ch' io bramava, così non ne dirò nulla. Forse altri potrà specolare un filo in questa dottrina, che conduca per ordine da un problema all' altro, e che se si fosse scoperto da principio, avrebbe facilitata ed abbreviata l' invenzione.

Il primo saggio della mia riuscita l' indirizzai due anni fa con una lettera inserita nel Giornale Brugnatelli all' eccellente artista il Cittadino *Annibale Beccaria*, allora patrizio milanese, ed ora municipalista e socio dell' istruzione pubblica, il quale all' esser fratello del celeberrimo autore del libro de' *Delitti e delle Pene* aggiunge la gloria vera e propria d' eseguire, qualor gli piaccia, finissimi stromenti di matematica. Quel mio saggio consisteva nel metodo di dividere la circonferenza in ventiquattro parti coll' ajuto d' un solo punto preso fuori d'essa. La costruzione di questa divisione è la più semplice, che si possa sperare, e l' ho ritenuta; l' altra in cento venti, che vi esposi, era troppo complicata; ora ne ho trovata una molto più breve, e tale, che la credo la brevissima. V' aggiunsi una spedita costruzione per avere le radici quadrate dall' uno sino alle dieci, che ho pur quì ritenuta. Gli altri problemi esposti in quella lettera siccome complicati, o di poca approssimazione, qui sono omessi.

Ora io sono giunto, come si vedrà dal libro, a dividere prontamente la circonferenza in dugento quaranta parti con esattezza geometrica per via del solo compasso e non adoperando altro che tre punti presi fuori della circonferenza stessa. Ciascuna di queste parti riesce di un grado e mezzo della divisione usata fin quì in gradi trecento sessanta. Divido, qualora piaccia, ogni arco in due. Ciò geometricamente. Per via di approssimazione divido la circonferenza col solo mezzo di quei tali trepunti in gradi e quarti di gradi senza l' errore d' una sesta parte di minuto secondo. Cogli stessi tre punti divido pure in minuti primi stando sempre al di sotto dell' error d' un secondo. Che di questa precisione possano essere contenti gli astronomi, mi ha lusingato a crederlo il leggere, che nemmeno gli artisti più celebri sieno passati oltre.

Ma non mi sembrava aver fatto abbastanza se non serviva colle mie teorie anche alla nuova divisione del cerchio. E' noto che i Francesi felici di avere nel seno della loro repubblica geometri primi nell' universo, secondando i loro consigli, hanno finalmente appagato i lunghi desiderj dei dotti col sanzionare in tutte le arti la sola divisione decimale. Questa divisione forse lentamente in altre provincie per l' urto dei pregiudizj, e più per la riazione dell' inerzia, ma invincibilmente col tempo prenderà piede dovunque abbia luogo qualche amore alle scienze, o un ben inteso interesse di commercio. Una delle divisioni, che dovevano riuscire più difficili ad alterarsi era quella della circonferenza del cerchio tra per l'antichità della divisione in 360, e soddivisione in 60 ricevuta dalle nazioni tutte; e per la fatica necessaria a rifar le tavole trigonometriche in qualunque nuovo sistema. Ma l'energia d'una grande nazione che si rigenera, ha vinto tutto. Fissate quattrocento parti, o gradi nella circonferenza, acciò il quadrante, che è il fondamento della trigonometria, resti diviso in cento, e ciascuna di queste centesime suddivisa in cento, e così via via; si sono già calcolate e stampate le tavole dei seni naturali, e artifiziali di quelle; e perchè nulla manchi ad assicurare, ed accrescere la precisione de' numeri, cospirò la nuova scoperta de' Francesi di stampare con caratteri saldati in piombo; e si han già tra mano queste nuove tavole di tale edizione chiamata stereotipa eseguita da *Firmino Didot*. Più: se n'aspettano altre copiosissime con gran numero di decimali, che si stanno preparando sotto la direzione del celebre *Prony* da una moltitudine di attivissimi calcolatori. Tutto ciò mi spinse a cercare un metodo almeno d'approssimazione per dividere la circonferenza in tali nuovi gradi e minuti, e m' è riuscito col ministero di que' soli tre punti d'avere con abbastanza pochi giri di compasso questi gradi e minuti centesimali senza il piccolo error d' un secondo.

Se null' altro si fosse fatto; si sarebbe non ostante raccomandato abbastanza il maneggio del puro compasso. Ma strada facendo ho trovato non esserci problema di geometria elementare, che col compasso solo non si potesse risolvere; in questo senso cioè di trovar tutti que' punti, che si richieggono nel problema per la posizione e determinazione delle rette, che v' abbisognano. Questo interessava la teoria. Ho voluto esaurire l' argomento; dare tutti gli elementi a tal uopo, e dimostrare che tutti i punti che Euclide o altri elementaristi trovano col sussidio del compasso e della riga congiunti; col solo primo stromento trovar si possono.

Non tutti i problemi elementari sciolti col solo compasso hanno un' abbastanza semplice costruzione. Ardisco però dire che la maggior parte dei più necessarj son brevi e succinti a segno, che chi vorrà risolverli nella pratica, troverà meglio servirsi del sol compasso per trovarne i punti fondamentali, ripudiando la riga; le vie che propongo nel libro giustificheranno quanto dico.

Io non indicherò quì tutti que' Problemi di simil genere, che mi sembrano di qualche importanza. Eccone non ostante alcuni. Se si vorrà trovare col compasso solo il centro d'un cerchio; si avrà con pochi tratti speditamente. Egualmente si avranno le terze, e le quarte proporzionali; non dico le medie. Chi vorrà costruire poligoni regolari non solo entro o intorno a cerchj dati, ma sopra basi date; ne avrà il mezzo facile nel compasso (*) Chi vorrà trovare radici quadrate di numeri, cioè duplicare, o moltiplicare comunque

(*) Gli architetti militari vi troveranno forse molte cose a proposito degli usi loro.

di area quadrati, o cerchi, o figure simili di qualunque specie; lo farà presto per via del compasso. E tutto ciò con geometrica precisione; essendone capace la natura di tali problemi. Per approssimazione poi chi vorrà avere una lunghezza eguale alla circonferenza d'un cerchio, o un arco eguale al raggio, o un quadrato eguale ad un cerchio, o un cerchio eguale ad un quadrato, o un cubo eguale ad una sfera, o una sfera eguale ad un cubo, o un cubo doppio d'un altro, o triplo, o quadruplo; potrallo avere impiegando sezioni d'archi, ossia determinando sempre non con altro che col compasso la lunghezza di que' lati o di quei raggi, che abbisognano alle richieste figure.

Ecco in breve quanto forma la *Geometria del Compasso*, che presento al Pubblico. Quanto alle dimostrazioni, ho studiato di farle geometriche all'antica. Questo m'è parso più proprio della natura de' miei problemi, e più breve. Dovunque geometricamente erano per riuscir troppo lunghe, ho scorciato il cammino col calcolo. Ho dunque servito ad un tempo alla brevità, alla chiarezza, ed all' eleganza quanto ho potuto farlo. Ho citato Euclide il gran maestro degli elementi. Dove occorrono proporzioni; i numeri delle proposizioni ch'io cito, son quelli del *Tacquet*. La ragione di ciò è, che questo libro è più nelle mani di tutti, che l'antico testo d' Euclide. Ho posti in carattere più grande i paragrafi, che serviranno maggiormente agli artisti. Chi ne vuole la dimostrazione, deve leggere tutto il libro. Chi non vuole che la parte pratica, potrà omettere quanto è stampato in minor carattere. Ciò lo faranno gli artisti; lo farà chi non vuole che divertirsi col compasso. A questo genere di divertimento ho assegnati molti problemi tratti da *Pappo* dall' *Ozanam* dal *Simpson* e da altri, che ho messi nel libro undecimo. Ecco tutto ciò che io aveva a dire a' miei lettori sopra questa *Geometria del Compasso*, che loro presento, la quale per la costruzione de' suoi problemi è la piu semplice e la più elementare geometria che aver si possa; e che da nissuno finora, ch'io sappia, s' era toccata.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO PRIMO

PRELIMINARE.

1\. CHiamo *Geometria del Compasso* quella, che per via del solo compasso senza la riga determina la posizione de' punti.

Dati per esempio due punti A, ed E Fig. 1.; se si cerchi il terzo D, che sia tanto lontano da ciascuno di essi, quanto essi lo sono
Fig. 1. tra loro; si descrivano coll' intervallo, ossia raggio AE, e coi centri A, ed E i due cerchj EDB, ADV, che si tagliano nel punto D; questo punto sarà il cercato; poichè sarà lontano dai punti A, ed E d' un intervallo eguale ad AE (Prop. 1. lib. 1.

Eucl.). Questo punto D si è trovato col solo compasso senza la riga.

2. Può accadere, che la posizione di un punto si trovi col solo compasso; ma per dimostrare la proposizione ci sia bisogno di costruire la figura col mezzo della riga.

Se per esempio, dati due punti A, e B, che

Fig. sieno lontani tra loro d'un certo intervallo,

2. che si prende per l'unità, ossia si fa $= 1$; si cerchi un punto D, che sia lontano da B dell'intervallo $BD = \sqrt{3}$; la soluzione del Problema sarà come segue.

Col centro A, raggio AB si descriva il cerchio BCD. Collo stesso raggio, centro B si descriva un arco, che tagli la circonferenza in C. Di nuovo collo stesso raggio, centro C si descriva un arco, che tagli la circonferenza più oltre in D. Sarà questo il punto cercato, e trovato senza la riga.

Per dimostrare nondimeno, che sia l'intervallo $BD = \sqrt{3}$, vi sarà d'uopo di linee rette, le quali si segnano colla riga. Sia BE il diametro del cerchio BCD, e si guidino le rette BD, DE. Sarà il triangolo BDE rettangolo in D (31. lib. 3.). Sarà dunque il quadrato della BE eguale alla somma de' due quadrati delle rette BD, e DE (47. lib. 1.); e però il quadrato della BD sarà eguale alla differenza de' quadrati della BE, e della DE. Ma essendo l'intervallo BC =

CD = AB; sarà ancora DE = AB (15. lib. 4.), ossia DE = 1. E' ancora BE = 2. Sarà dunque $(BD)^2$, cioè il quadrato della BD eguale a $4 - 1 = 3$; e però la sua radice $BD = \sqrt{3}$. Il che era da dimostrarsi, e non si è potuto fare senza la riga. Questa Proposizione è la 12. del lib. 13. d' Euclide.

3. Dalla definizione di questa Geometria del Compasso (§. 1.) è chiaro, che appartengono ad essa tutti i Problemi, che si possono sciogliere col compasso solo, benchè per esso solo non si possano dimostrare; com' è il Problema precedente (§. 2.).

4. L' uso di questa Geometria sarà grandissimo, come apparirà dagli esempj, nel trovare i punti in pratica colla maggior precisione possibile, e spesso molto più speditamente col solo compasso, che chiamando in soccorso anche la riga.

5. Sarà dunque nostro ufizio sciogliere i Problemi col solo compasso; sarà poi lecito servirsi di dimostrazioni costruite secondo l' uso col compasso, e colla riga, al qual fine citeremo le proposizioni, e i libri di Euclide.

6. Così poi verremo a capo di questo trattato, che non abbia a mancare alcun elemento, perchè col solo compasso si possano determinare tutti que' punti di qualsivoglia Pro-

blema, che fino adesso col cerchio e colla riga solevansi determinare.

7. Non pertanto noi non porremo quì tutti questi Problemi; ma dimostrati gli elementi necessarj, e bastanti per tutti, tra essi sceglieremo un buon numero de' principali, cioè tutti quelli, che ci sembreranno i più utili, o per una certa eleganza pregevoli.

8. Aggiungeremo quì in favore degli artisti, in grazia de' quali in gran parte quest' opera è stata scritta, che sapendo essi la molestia, e il pericolo d' errare, che nasce dall' allargare, e stringere il compasso a varie aperture precise; noi procureremo di sciogliere i Problemi col minimo numero possibile di aperture di compasso. Sarà poi anche meglio per l' artista avere in pronto tanti compassi *fedeli*, come li chiamano, ossia tali, che uno si possa assicurare, che conservino appunto l' apertura data; quante sono le aperture, che richiede la soluzione del Problema. Poichè accaderà spesso, che dovremo adoperar più volte la stessa apertura dopo averne adoperata una o più altre; così senza allargare, o stringere un sol compasso, ripiglieremo quell' altro compasso messo da parte,

che la conserva. A questo fine alcune volte chiameremo col nome di compasso primo, secondo, terzo le aperture successive, colle quali verrà sciolto il Problema.

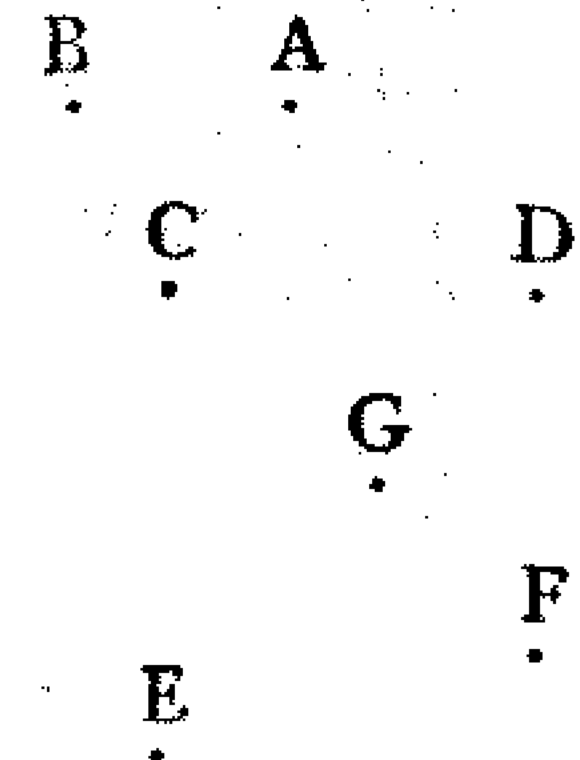
9. Essendo oltre ciò importante alla precisione pratica della posizione di un punto, che la sezione delle linee, che lo determinano, si faccia ad angoli retti o vicini al retto; faremo sempre in modo, che un arco tagli l'altro o ad angoli retti, se ciò ne riuscirà, o almeno ad angoli non molto lontani dal retto.

10. Per essere più brevi, senza però riuscire oscuri, nell'indicare le costruzioni delle figure adopreremo spesso alcuni compendj, che saranno tosto intesi al solo guardar la figura. Per esempio

Fig. 2. nella Fig. 2. in luogo di dire: *col raggio* AB, *e col centro* B *si descriva un arco, che tagli la circonferenza* BCD *nel punto* C. *Poi collo stesso raggio, e col centro* C *si descriva un arco, che tagli la stessa circonferenza in* D *ec.*; diremo solamente: *si faccia ad* AB = BC = CD, ec. Poichè è abbastanza chiaro, che i punti B, C, e D, coi quali si indica la stessa cir-

conferenza B C D sono nella stessa; cosicchè non v'è alcun pericolo d'equivoco.

11\. Istessamente dati per esempio tre intervalli AB, CD, EF; se dirò; *si faccia a* CD = EG; *ad* AB = FG; si dovrà intendere che dica; *col raggio* C D, *e col centro* E *si descriva un cerchio, nella cui circonferenza sia il punto* G. *Quindi coll'intervallo* AB, *e col centro* F *si descriva un altro cerchio, che tagli il primo nel punto* G.



12\. Alle volte nelle dimostrazioni nomineremo alcune linee rette, che non saranno nella figura, nominando i due punti estremi, ai quali dovrebbero esser condotte; come se nella figura del §. 11. nominassi la retta AB, ovvero CD. Ciò faremo, quando non vi sarà pericolo d'oscurità, per conservar nitida la figura, e lasciare apparire meglio la costruzione fatta col solo cerchio.

13\. *Lemma*. Se co' due centri A, e B, e co' raggi AP, ed AQ si descrivano degli ar-

Fig. chi, che si taglino in P, e p; Q, e q; i
3. punti Q, P, p, q saranno nella stessa retta.

Dimostrazione. Essendo per costruzione eguali rispettivamente tra loro tutti i lati de' triangoli APp, BPp; l'angolo APp sarà eguale all'angolo BPp (8. lib. 1.). Per la stessa si dimostra essere APQ = BPQ. Dunque la somma de' due APp, APQ è eguale alla somma de' due BPp, BPQ. Ma la somma di questi quattro angoli è eguale a quattro retti (13. lib. 1. Coroll.). Dunque ciascuna delle somme di due eguali equivale a due retti. Dunque la QPp è retta (14. lib. 1.). Nella stessa maniera si dimostra, che è retta la Ppq. Dunque i punti Q, P, p, q sono nella stessa retta.

14. Stanti le stesse cose del §. 13.; le rette AB, Pp, così AB, Qq si bipartiranno egualmente in M ad angoli retti, e le QP, qp saranno eguali.

Dimostrazione. Poichè per l'eguaglianza de' lati de' due triangoli APB, ApB si ha l'angolo PAB = pAB (8. lib. 1.). Ma è ancora APp = ApP (5. lib. 1.). Dunque anche AMP = AMp (Coroll. Proposiz. 32. lib. 1.). Dunque entrambi retti (13. lib. 1.). E sarà Pp bipartita in M per la dimostrazione della Prop. 10. lib. 1. Nella stessa maniera si dimostrerà, che si bipartono in M la Qq, e la AB. Dalle eguali poi

QM, e qM togliendo le eguali PM, pM; i residui QP, qp saranno eguali.

15. *Corollario*. Sarà dunque $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$ (47. lib. 1.).

16. *Lemma*. Stanti le stesse cose del §. 13. sarà $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp . PQ$.

Dimostrazione. Poichè è $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + 2MP . PQ$ (12. lib. 2.). Ma è $2MP = Pp$ (§. 14.). Dunque ec.

17. *Lemma*. Sarà pure $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP . pQ$.

Dimostrazione. Poichè è $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - 2pM . pQ$ (13. lib. 2.). Ma è $2pM = pP$ (§. 14.). Dunque ec.

18. *Corollario I*. Essendo $pQ = pP + PQ$; sarà $(pQ)^2 = pP . pQ + PQ . pQ$ (2. lib. 2.); quindi sottraendo $pP . pQ$ si ha $(pQ)^2 - pP . pQ = PQ . pQ$. E fatta la sostituzione di questo valore nel valore di $(AQ)^2$ del §. 17., si avrà $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ . PQ$. Donde sottraendo di qua e di là $(Ap)^2$, nasce $(AQ)^2 - (Ap)^2 = pQ . PQ$. Se ora si eseguisca la moltiplicazione di $AQ + Ap$ per $AQ - Ap$; si troverà $(AQ + Ap)(AQ - Ap) = (AQ)^2 - (Ap)^2$. Quindi si avrà

$$(AQ + Ap)(AQ - Ap) = pQ . PQ.$$

Donde per la 16. lib. 6. si deduce l'analogia

$$pQ : AQ + Ap :: AQ - Ap : PQ,$$

ossia sostituendo AP in luogo di Ap, e invertendo alternativamente

$$PQ : AQ + AP :: AQ - AP : pQ$$

Da queste due analogie vien espresso il celebre

Teorema. In qualunque triangolo un lato qualunque stà alla somma degli altri due; come la loro differenza stà alla differenza, o alla somma de' segmenti, che fa su quel lato la perpendicolare condotta dall' angolo opposto, secondo che essa cade dentro o fuori del triangolo.

19. *Corollario II.* Se sarà $AQ = pQ$; tolti di qua e di là i due termini eguali $(AQ)^2$, $(pQ)^2$, e aggiungendo d'ambe le parti $pP \cdot pQ$; risulterà $pP \cdot pQ = (Ap)^2$.

20. *Lemma.* Stanti le stesse cose (§. 13.), se sia retto l'angolo RpQ; sia poi l'angolo

Fig. 4. $RpS = RpA$; e $pS = pR = pA$; sarà AS parallela, ed eguale alla Pp; e sarà $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS \cdot pQ$.

Dimostrazione. Poichè se dai due angoli retti RpQ, Rpq si sottraggono i due eguali RpA, RpS; rimarranno eguali gli angoli ApP, Spq. Ma $ApP = APp$ (5. lib. 1.). Dunque $Spq = APq$. Dunque AP, Sp sono parallele (29. lib. 1.). Ma sono anche eguali per costruzione. Dunque le due AS, Pp sono eguali, e parallele (33. lib. 1.). Si ha poi $(RQ)^2 = (Rp)^2 + (pQ)^2$ (47. lib. 1.) $= (Ap)^2 + (pQ)^2$. E pel Lemma

§. 17., $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP$
pQ. Dunque $(AQ)^2 = (RQ)^2 - pP$
pQ, ossia $= (RQ)^2 - AS.\ pQ$.

21. *Lemma*. Stanti le stesse cose (§. 13., e 20.
sarà $(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS.\ pQ$.

Dimostrazione. Poichè se si faccia $ST = Sp$
$pT = pP$ (§. 11.); nei due triangoli SpT
APp si troveranno tra loro eguali gli an
goli SpT, APp (8. lib. 1.); e però PpT
retta (27. lib. 1.). Sarà poi $(SQ)^2 =$
$(pS)^2 + (pQ)^2 + pQ.\ pT$ (§. 16.)
Ma è $(pS)^2 + (pQ)^2 = (pR)^2 + (pQ)^2 =$
$(RQ)^2$; ed è $pT = pP = AS$. Dunqu
$(SQ)^2 = (RQ)^2 + AS.\ pQ$.

Dai due Lemmi precedenti segue per Corollari
essere $(AQ)^2 + (SQ)^2 = 2(RQ)^2$.

22. *Lemma*. Se sarà $AQ = pQ = BQ$;
Fig. $Ap = pB = pS$, essendo pS sulla conti
4. nuazione della Bp; sarà $AS.\ pQ = (Ap)^2$

Dimostrazione. Avendo i triangoli isosceli AQp
BQp i lati eguali tra loro; sarà l'angolo
$QpA = QpB$ (8. lib. 1.). Sarà poi l'an
golo ApB, che è la somma dei due, egual
anche alla somma de' due angoli SAp, AS
(32. lib. 1.), i quali essendo eguali tra loro
per essere isoscele il triangolo ApS (5. lib
1.); sarà ciascuno d'essi eguale all'angolo
$ApQ = pAQ$ (5. lib. 1.). Sarà dunque
il triangolo pAS simile al triangolo QpA
(32. lib. 1. 4. lib. 6.); e quindi

$pQ : Ap :: Ap : AS$, e $AS \cdot pQ = (Ap)^2$ (17. lib. 6.).

23. *Lemma*. Se sia $AB = AC = BD$; e $AD = BC$ sarà; $DC \cdot AB = (AB)^2 - (AD)^2$.

Dimostrazione. I due triangoli ADB, ACB avendo i lati rispettivamente eguali, saranno eguali (8., e 26. lib. 1.). Essendo poi posti tutti e due sulla stessa base AB; saranno fra le stesse parallele DC, AB (39. lib. 1.). Se dunque sulla BA si prende $BE = DC$; sarà DE uguale, e parallela alla BC (33. lib. 1.), e uguale ancora alla DA. Quindi i due triangoli isosceli BDA, DAE, che hanno un angolo comune in A, saranno simili (5. e 32. lib. 1., e 4. lib. 6.), e sarà $AB : AD :: AD : AE$; quindi $AB \cdot AE = (AD)^2$ (17. lib. 6.). Si ha poi $AB \cdot AE + AB \cdot BE = (AB)^2$ (2. lib. 2.). Quindi ad $AB \cdot AE$ sostituendo $(AD)^2$, e a BE sostituendo DC; si ha $(AD)^2 + AB \cdot DC = (AB)^2$. E sottraendo $(AD)^2$, si avrà $DC \cdot AB = (AB)^2 - (AD)^2$.

Fig. 5.

24. *Lemma*. Se nel cerchio $B\mu G$ al raggio AB si alzi nel centro A la normale Ae eguale alla corda BG dell' arco $B\mu G$; e fatto centro in e col raggio AB si descriva un arco, che tagli la circonferenza in μ; sarà l' arco $B\mu$ eguale alla metà dell' arco $B\mu G$.

Fig. 6.

Dimostrazione. Per l' eguaglianza de' lati de' due triangoli ABG, $A\mu e$ è l' angolo $GAB = A\mu e$ (8. lib. 1.). Si divida per metà l' angolo $A\mu e$ colla retta μM; essendo isoscele il triangolo $\mu e A$, l'angolo $\mu e M = \mu A M$; quindi ne' due triangoli $\mu e M$, $\mu A M$ essendo eguali tra loro gli altri due angoli sarà anche $\mu M e = \mu M A$ (Coroll. 32. lib. 1.); quindi μM normale alla $A e$ (13. lib. 1.), e quindi parallela alla AB (29. lib. 1.), e sarà l'angolo $M \mu A = \mu A B$ (27. lib. 1.), sarà dunque μAB la metà dell'angolo GAB, e però anche l'arco $B\mu$ metà dell' arco $B\mu G$.

25. Se nel parallelogrammo $ABMN$ sarà la diagonale MA eguale ai lati opposti MB, AN;

Fig. 7. sarà il quadrato dell'altra diagonale BN eguale al quadrato della prima aggiuntivi i due quadrati degli altri due lati.

Dimostrazione. Si divida AB per metà in m colla perpendicolare Mm (10, 11. lib. 1.), e sopra la BA continuata si prenda $An = Bm$; sarà $mn = BA = MN$; e però $MNnm$ parallelogrammo (33. lib. 1.), e sarà retto l'angolo NnB (27. lib. 1.). Quindi $(BN)^2 = (AB)^2 + (AN)^2 + 2AB \cdot An$ (12. lib. 2.). Ma $An = \frac{1}{2}AB$. Dunque $(NB)^2 = (AN)^2 + 2(AB)^2 = (AN)^2 + (AB)^2 + (MN)^2$.

26. Se in qualunque triangolo BPE si tagli in due egualmente la base BE in A, e dall' angolo opposto P si guidi la PA; sarà la

Fig. 8. somma de' quadrati dei lati BP, e PE egua-

le alla somma de' quadrati eguali dei due segmenti, aggiuntovi il doppio quadrato della AP.

Dimostrazione. Poichè se si cali il perpendicolo PR sulla base BE; sarà $(BP)^2 = (BA)^2 + (AP)^2 + 2\,BA.AR$ (12. lib. 2.). Sarà pure $(PE)^2 = (AE)^2 + (AP)^2 - 2\,AE.AR$ (13. lib. 2.). Fatta dunque la somma dei valori dei due quadrati $(BP)^2$, e $(PE)^2$, essendo $BA = AE$; sarà $(BP)^2 + (PE)^2 = (BA)^2 + (AE)^2 + 2(AP)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO SECONDO

DELLA DIVISIONE DELLA CIRCONFERENZA E DEGLI ARCHI DEL CERCHIO.

PROBLEMA.

27. Dividere la circonferenza del cer-
Fig. chio BDd in quattro parti eguali.
9.
Soluzione. Nella stessa circonferenza si
faccia al raggio AB = Bc = BC =
CD = DE = Ed col primo compasso
(§. 10. 8.). Sarà dc = cB = BA
(15. lib. 4.).
Si faccia
a BD = Ba = Ea col 2.do compasso
ad Aa = BF = Bf col 3.o compasso.
Si avrà divisa la circonferenza in quat-
tro parti eguali BF, FE, Ef, fB.

Dimostrazione. Essendo BAE un diametro (15. lib. 4.); e avendo i triangoli aAB, aAE tutti i lati eguali, e però eguali gli angoli aAB, aAE (8. lib. 1.); questi saranno retti (13. lib. 1.). Dunque $(aB)^2 = (AB)^2 + (aA)^2$ (47. lib. 1.); e sottraendo $(AB)^2$ da tutte due le parti, si ha $(aB)^2 - (AB)^2 = (aA)^2$. Si faccia per brevità $AB = 1$; sarà $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ (§. 2.). Sarà dunque $(aA)^2 = 3 - 1 = 2$, e quindi anche $(BF)^2 = (aA)^2 = 2 = 1 + 1 = (AB)^2 + (AF)^2$. Dunque nel triangolo FAB l'angolo FAB sarà retto (48. lib. 1.), e però anche l'angolo FAE (13. lib. 1.). Saranno dunque gli archi BF, FE eguali tra loro, e quarti di cerchio, come pure gli archi Bf, fE.

28. *Corollario*. Essendo retti gli angoli BAa, BAF; i tre punti A, F, a saranno nella stessa retta.

29. Abbiamo dunque già la circonferenza divisa in due parti eguali per esempio nei punti B, ed E; in tre parti, come ne' punti B, D, d (15. lib. 4.); in quattro parti ne' punti B, F, E, f (§. 27.); in sei parti nei punti B, C, D, E, d, c (15. lib. 4.).

PROBLEMA.

30. Dividere una circonferenza in otto parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come al §. 27 Si faccia

Fig. 9. ad $AB = aG = aH$ compasso 1.°
ad $Aa = Gg = Hh$ compasso 3.°
sarà anche ad $Aa = gh$; e la circonferenza sarà divisa in otto parti eguali ne' punti B, G, F, H, E, h, f, g.

Dimostrazione. Poichè essendo $(Aa)^2 =$ (§. 27.); sarà $(Aa)^2 = (AG)^2 + (aG)^2$ Sarà dunque retto l'angolo aGA (48. lib. 1.) Quindi pel triangolo isoscele aGA gli altri due angoli GAa, GaA tra loro eguali (5. lib. 1.) saranno semiretti (32. lib. 1.) Dunque l'angolo GAF, che è lo stesso coll'angolo GAa (§. 28.), sarà la metà di BAF. Dunque anche l'arco $GF = BG$ Ma per costruzione è $Gg = BF$ (26. lib. 3.) Dunque tolto di qua e di là BG; sarà G $= Bg$. Nello stesso modo si dimostrerà che gli altri archi sono eguali. Sarà dunque la circonferenza divisa in parti eguali ciascuna alla metà del quadrante, e però in otto

PRO-

PROBLEMA.

31. Dividere la circonferenza in dodici parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come nel §. 27., si faccia ad AB = FN = N*n* = FO
Fig. 9. = O*o*. Sarà la circonferenza divisa in dodici parti eguali ne' punti B, N, C, F, D, O, E, *o*, *d*, *f*, *c*, *n*.

Dimostrazione. Poichè tolti via gli archi eguali BC, DE dagli eguali BF, FE; gli archi, che rimangono CF, FD saranno eguali. Essendo dunque CD la sesta parte della circonferenza (§. 29.); sarà CF la sua metà, cioè la duodecima. Sarà ancora CF = CN a cagione di FN = CD; così pure CN = NB a cagione di FN = CB. E nella stessa guisa si dimostrerà, che tutte le altre sono duodecime parti della circonferenza.

PROBLEMA.

32. Dividere la stessa circonferenza in ventiquattro parti eguali.

Soluzione. Stanti le stesse cose come sopr (§. 30., e 31.); si faccia ad AB = G
Fig. 9. = LM = G*k* = *ki* = HI = IK = H*m* = *ml* compasso 1.° e sarà fatto.

Dimostrazione. Poichè se dagli archi eguali GF, GB (§. 30.) si sottraggono gli eguali CF, NB (§. 31.); resteranno eguali GC, GN ed essendo CN una duodecima parte dell circonferenza (§. 31.); saranno GC, GN ventiquattresime parti di essa. Essendo po FN = GL; tolto via FG; sarà NG = FL. Dunque anche FL sarà una venti quattresima, e la metà di FD (§. 31.) Nello stesso modo si dimostrerà essere egua a questi gli archi DH, HO, FI, IC, co tutti gli altri determinati quì sopra.

33. Noi si siamo quì serviti senza citarle del Prop. 26., e 27. del lib. 3. d'Euclide che in un cerchio, o in cerchj eguali le ret eguali sottendono archi eguali; il che farem anche in seguito per brevità.

34. Gli Antichi per via del centro A col raggio AB, e col solo compasso divisero la circonferenza in sei parti eguali. Le altre divisioni le ottenevano col compasso, e colla riga prendendo varj punti fuori della circonferenza. Ora noi abbiamo trovato un punto *a* tale, che solo basta a dividere la circonferenza in ventiquattro parti eguali col solo compasso. Il che è nello stesso tempo più spedito, e comodo, e porta ad una divisione pratica molto più accurata dell' antica.

35. Può sembrare elegante la serie delle aperture de' tre compassi, che bastano a questa divisione. Poichè si trova

l'apertura del primo $= \sqrt{1}$
del terzo $= \sqrt{2}$
del secondo $= \sqrt{3}$

36. *Lemma*. Se nel cerchio BGE sia il raggio $AB = 1$; sia poi l'arco BG un'ottava parte
Fig. della circonferenza; sarà il quadrato della sua
10. corda BG, ossia $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Sul diametro BE si cali la perpendicolare GP. Nel triangolo rettangolo GPA a cagione dell'angolo semiretto GAP sarà semiretto ancora AGP (32. lib. 1.). Saranno dunque eguali i lati GP, PA (6. lib. 1.). E' poi $(AG)^2 = (PG)^2 + (AP)^2$ (47. lib. 1.). Dunque $(AG)^2 = 2(AP)^2$; quindi $2(AG)^2 = 4(AP)^2$, ossia $2 = (2AP)^2$, e quindi $\sqrt{2} = 2AP$; $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$BP = AB - AP = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Si ha poi, essendo retto l'angolo BGE (31. lib. 3.), BP : BG :: BG : BE (8. 4. lib. 6.); quindi (17. lib. 6.) $BG^2 = BP \cdot BE = 2BP$. Dunque $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$.

37. *Lemma*. Stanti le stesse cose del §. 36., sarà il quadrato della GE corda di tre ottave parti della circonferenza, ossia $(GE)^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Dimostrazione. Poichè sarà $(BE)^2 = (GE)^2 + (BG)^2$ (47. lib. 1.). Ma $(BE)^2 = 4$; $(BG)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§. 36.). Dunque $4 = (GE)^2 + 2 - \sqrt{2}$, e togliendo 2, aggiungendo $\sqrt{2}$, si avrà $2 + \sqrt{2} = (GE)^2$.

PROBLEMA.

38. Essendosi già divisa la circonferenza in ventiquattro parti (§. 32.) eguali; suddividerla in quarantotto.

Soluzione. Si faccia

ad $aN = Be = Ee$ (§. 11.) compasso 4.°

ad $AB = e\mu = e\nu$ compasso 1.°

Fig. 11. Saranno $K\mu$, μN, $M\nu$, νO quarantottesime parti della circonferenza.

Dimostrazione. Se si concepiscono guidate le rette Aa, Nn, aN, aB (§. 12.); essendo retto l'angolo BAa (§. 27.); e l'angolo

BAN $=$ BAn (§. 31.), e i tre raggi AN, AB, An eguali; sarà $(aN)^2 = (aB)^2 - Nn . Aa$ (§. 20.); però a cagione di $aN =$ Be, sarà pure $(Be)^2 = (aB)^2 - Nn . Aa$. Essendo poi i triangoli eAB, eAE a cagione de' lati rispettivamente eguali, rettangoli in A (8., e 13. lib. 1.); sarà $(Be)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2$ (47. lib. 1.). E però $(AB)^2 + (Ae)^2 = (aB)^2 - Nn . Aa$. Ma è $(aB)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2$. Sarà dunque $(AB)^2 + (Ae)^2 = (AB)^2 + (Aa)^2 - Nn . Aa$; quindi sottraendo $(AB)^2$, si ha $(Ae)^2 = (Aa)^2 - Nn . Aa$. Ma $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.), e $Nn = 1$; essendo Nn corda d'una sesta della circonferenza (§. 31.). Dunque $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2} =$ al quadrato della corda dell'arco BG, che è l'ottava parte della circonferenza (§. 30., e 36.). Sarà dunque l'arco Bμ $=$ μG (§. 24). Se poi da questi archi si sottraggono gli archi eguali BK, NG (§. 32.); saranno gli archi Kμ, μN eguali. Essendo dunque l'arco KN la vigesimaquarta parte della circonferenza (§. 32.); saranno le sue metà, ossia gli archi Kμ, μN, e per la stessa ragione gli archi Mν, νO la quarantottesima parte della circonferenza.

39. Stanti le stesse cose potrebbe chi volesse col solo ajuto de' quattro compassi indicati quì sopra dividere tutta la circonferenza in quarantotto parti eguali
Fig. 11. (§. 8.). Poichè se pel primo compasso di apertura = AB si divida la circonferenza in sei parti cominciando dal punto μ; si bipartiranno gli archi IF, HO, *mo*, *fl*, *ng*. Dividendo poi la circonferenza in sei parti cominciando dal punto ν; resteranno divisi gli archi *oh*, *fi*, *nk*, NG, FL. Dividendo poi la circonferenza in quattro parti col terzo compasso di apertura eguale ad A*a* cominciando dal punto μ; resteranno divisi gli archi LD, *ic*; cominciando poi dal punto ν; resteranno divisi gli archi IC, I*d*. In seguito dividendo la circonferenza in sei parti eguali di nuovo col primo compasso, ma cominciando dagli ultimi punti trovati col terzo compasso; resteranno divisi per metà tutti gli altri archi.

La Dimostrazione è simile a quella del §. 32.

PROBLEMA.

40. **D**ividere la circonferenza BDd in cinque parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come nel Problema §. 31.; si faccia ad $Aa = Nb$ $= Ob$; compasso 3.°
Fig. 12.
Si faccia a $Bb = BQ$.
Sarà l'arco BQ la quinta parte della circonferenza.

Dimostrazione. Se si concepiscano condotte due rette NO, AF, che si tagliano in X; a cagione de' triangoli equilateri FNA, FOA la retta FA sarà bipartita in X (10. lib. 1.); così pure NO (§. 14.). Essendo poi l'arco NFO eguale all'arco BCD (§. 31.), sarà il quadrato della sua corda NO eguale al quadrato della corda $BD = 3$ (§. 2.), il quadrato poi della sua metà NX, ovvero $(NX)^2 = \frac{3}{4}$ (per Coroll. della Prop. 4. lib. 2.). Sono poi nella stessa retta i punti b, A, X, e il triangolo NbX rettangolo (§. 12. 13. 14.); così $(Nb)^2 = (Aa)^2$ $= 2$ (§. 27.). Laonde $(Xb)^2 = (Nb)^2$ $- (NX)^2$ (47. lib. 1.) $= 2 - \frac{3}{4} =$ $\frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Ma per l'angolo retto XAB lo stesso che FAB si ha $(BX)^2 =$ $(AB)^2 + (AX)^2$ (47. lib. 1.).

Ed è $(AX)^2 = \frac{1}{4}(AF)^2$ (per Coroll Prop. 4. del 2.). Sarà dunque $(BX)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = (Xb)^2$. Dunque le rette BX Xb sono eguali. Sarà dunque questo punto quello stesso, che adopera Tolommeo ne primo Libro dell'Almagesto per iscrivere u pentagono, e un decagono equilatero, e equiangolo nel cerchio. Vedi la dimostrazio ne del Clavio nello Scolio alla Prop. 10 del Libro 13. d'Euclide. Vedi ancora numeri seguenti (§. 45. ec.), dai quali risul terà la dimostrazione intera di questa Propo sizione, e delle seguenti.

PROBLEMA.

41. Dividere la circonferenza in diec parti eguali.

Fig. 12.

Soluzione. Stanti le cose come nel Pro blema precedente (§. 40.), si facci ad $Ab = BP$, sarà $BP = PQ$; arch eguali alla decima parte della circonfe renza.

Dimostrazione. Vedi 10. lib. 13. Eucl.

PROBLEMA.

42\. Dividere la circonferenza in centoventi parti eguali.

Fig. 12.

Soluzione. Stanti le cose come ne' Problemi §§. 32., e 40., sarà QI la centoventesima parte della circonferenza.

Dimostrazione. Poichè l'arco BI è eguale a cinque ventiquattresime della circonferenza §. 32., e l'arco BQ eguale a una quinta. Dunque $QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25 - 24}{120} = \frac{1}{120}$.

43\. Potrà chi voglia con soli quattro compassi, ossia quattro aperture d'un compasso, e con soli due punti presi fuori della circonferenza, cioè coi soli due punti *a*, e *b*, dividere la circonferenza del cerchio in centoventi parti eguali.

Poichè col punto *a*, e con tre compassi avendo divisa la circonferenza in 24. parti, Probl. §. 32., e avendo trovato il punto *b* §. 40. Si faccia col quarto compasso ad $Ab = BP = PQ = QR = RS$, a cui sarà pure eguale SE

§. 41. Ora per dividere l'arco NG in cinque parti eguali, ciascuna delle quali sarà una centoventesima; si faccia ad $Ab = Lq = qp = I\pi = O\rho = \rho\omega = \omega\varphi$. Si avrà diviso l'arco NG in cinque parti eguali. Nello stesso modo si potranno dividere tutti gli altri archi GC, CI ec.

Dimostrazione. Poichè essendo $BQ = RE$; $BF = FE$; $IF = FL$; sarà anche $IQ = LR$, ed essendo $Lq = QR$; sarà anche $Qq = LR = QI$. Nello stesso modo essendo $QP = qp$; sarà anche $Qq = Pp = QI$. Parimente a cagione di $I\pi = QP$; sarà $\pi P = QI$. Essendo poi $O\omega = BQ$; $OI = IB$; sarà ancora $I\omega = QI$. Inoltre a cagione di $\omega\varphi = I\pi$; sarà $I\omega = \varphi\pi = QI$. Essendo poi $O\varphi = O\rho + \rho\omega + \omega\varphi = BP + PQ + QR = BR$, tolti di quà e di là gli archi eguali OG, BL; si avrà il residuo $G\varphi = LR = QI$. Finalmente a cagione di $BI = LN$, tolti gli archi eguali BQ, Lp, sarà il residuo $QI = Np$. Si sarà dunque diviso l'arco NG ne' cinque archi Np, pP, $P\pi$, $\pi\varphi$, φG eguali ciascuno all'arco QI, e però eguali tra loro. Essendo poi NG una ventesimaquarta della circonferenza (§. 32.), sarà ogni sua quinta parte una centoventesima della circonferenza.

44. Abbiamo dunque ormai diviso col solo compasso la circonferenza in tutte quelle parti eguali, le quali si ottenevano dagli Antichi inscrivendo al cerchio i cinque poligoni regolari triangolo, quadrato, pentagono, esagono e decagono, impiegando insieme il compasso, e la riga. E' poi riuscito di sommo comodo l'aver potuto ottenere tutto ciò coll'assumere solamente due punti fuori della circonferenza cioè a, e b, e coll' impiegare solamente quattro aperture di un compasso, ossia quattro compassi (§. 43. 8.). Chi vorrà fare il confronto di questo metodo, col metodo conosciuto potrà giudicare della sua semplicità e speditezza, e della sua precisione nella pratica.

45. Essendo pel §. 40.

$$Xb+XF=Fb=Xb+XA$$

$$Ab=Xb-XA$$

sarà $Fb\,.\,Ab=(Xb)^2-(XA)^2$

$$=(XB)^2-(XA)^2=(AB)^2$$

ossia $Fb\,.\,Ab=(FA)^2$; quindi la Fb sarà divisa in A in estrema e media ragione (30. lib. 6.).

46. Sarà quindi $Fb\,.\,Ab=(FA+Ab)\,Ab$ $=(fA)^2=(fA+Ab)\,Ab=fA\,.$ $Ab+(Ab)^2=fA\,(fA-fb)+(Ab)^2$ $=(fA)^2-fA\,.\,fb+(Ab)^2$. Avendosi dunque $(fA)^2=(fA)^2-fA\,.\,fb+(Ab)^2$,

tolto $(fA)^2$, e aggiunto $fA \cdot fb$; si av
$fA \cdot fb = (Ab)^2$. Quindi anche la
sarà divisa in b in estrema e media ragion

47. Se col centro b, raggio bA si tagli la ci
conferenza in T; sarà $Tf = Tb = bA$
Poichè si avrà $fA \cdot fb = (Ab)^2$ (§. 46
$= (Tf)^2$. E quindi (17. lib. 6.
$fA : fT :: fT : fb$. Dunque i due tr
angoli fAT, fbT, che hanno l'angolo co
mune in f, avranno i lati, che lo conte
gono proporzionali; e quindi (6. lib. 6.
saranno simili. Sarà dunque isoscele anche
triangolo fbT, e sarà $Tb = Tf$.

48. L'angolo $TbA = Tfb + bTf$ (32. lib. 1.
$= Tbf + bAT$, e aggiungendo Tbf, sa
$TbA + Tbf = 2Tbf + bAT$; ma Tb
$+ Tbf =$ due retti (13. lib. 1.). Dunqu
$2Tbf + bAT =$ due retti. Ma $Tbf =$
$bAT + bTA$ (32. lib. 1.) $= 2bAT$
(5. lib. 1.). Dunque $2Tbf + bAT =$
$5bAT =$ due retti. Quindi l'angolo bAT
che è lo stesso coll'angolo fAT, sarà u
quinta di due retti, e l'arco fT una decim
della circonferenza.

49. Se si piglia la corda $ft = fT$; sarà pur
$bt = ft$ (§. 47.), e le due tT, bf
taglieranno per metà ad angoli retti in u
punto y (§. 14.); e sarà $(Tf)^2 = (Ty)^2$
$+ (fy)^2$; quindi $4(Tf)^2 = 4(Ab)^2 =$
$4(Ty)^2 + 4(fy)^2 = (Tt)^2 + (fb)^2$;

quindi $(Tt)^2 = 4(Ab)^2 - (fb)^2$. Ma $(fb)^2 = (fA - Ab)^2 = (fA)^2 - 2fA \cdot Ab + (Ab)^2$. Dunque $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2fA \cdot Ab$. Ora $2fA \cdot Ab = 2fA\,(fA - fb) = 2(fA)^2 - 2fA \cdot fb = 2(fA)^2 - 2(Ab)^2$. Dunque $(Tt)^2 = 3(Ab)^2 - (fA)^2 + 2(fA)^2 - 2(Ab)^2 = (fA)^2 + (Ab)^2 = (BA)^2 + (Ab)^2 = (Bb)^2$; e quindi $Tt = Bb$; Ma Tt è corda di due decime, ossia d' una quinta parte della circonferenza. Quindi anche Bb. Quindi

50. Nel triangolo rettangolo ABb il quadrato del lato del pentagono è eguale alla somma de' quadrati dei lati dell'esagono e del decagono. Questa è la 10. lib. 13. Eucl.

51. I lati del triangolo rettangolo ABb sono corde di archi, che sono in progressione contrarmonica. Poichè questi archi sono $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ della circonferenza. Si trova poi $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} : \frac{1}{6} - \frac{1}{10} :: \frac{1}{10} : \frac{1}{5}$.

52. Essendo $fb : bA :: bA : Af$ (§. 46.); è ancora $fb : bA :: bA : AF$; e quindi il diametro Ff resta diviso ne' punti A, e b in tre parti continuamente proporzionali.

PROBLEMA.

53. Dividere la circonferenza in venti parti, ossia trovare una ventesima parte di essa.

Soluzione. Stando le cose come al §. 40.; nel quadrante B V f si faccia a B b = f V. Sarà l' arco B V una ventesima.

Dimostrazione. Poichè è B V = Bf — f V = $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{5}$ (§. 40.) = $\frac{1}{20}$.

Altra Soluzione. Stando pure le cose come al §. 40.; nel quadrante B V f si faccia ad A B = b V. Sarà l' arco B V una ventesima.

Dimostrazione. Essendo A b corda d' una decima; sarà l' arco B V la metà d' una decima, ossia una ventesima (§. 24.).

54. A cagione di Vb = V A il triangolo A Vb è isoscele come bTf. Inoltre essendo F A : Ab :: Ab : bf (§. 52.), ossia sostituendo valori eguali V A : Ab :: Tb : bf; i due triangoli isosceli avranno i lati proporzionali; quindi saranno simili (6. lib. 6.).

55. Essendo pure bF : F A :: F A : Ab (§. 45., e 17. lib. 6.); sostituendo valori eguali si

avrà $bF : bV :: bV : Ab$. E però ne' due triangoli bFV, bVA si avranno i lati proporzionali, che formano l'angolo comune in b, e però i triangoli saranno simili (6. lib. 6.). Sarà dunque isoscele anche il triangolo bFV, e sarà $FV = Fb$.

56. Essendo l'arco fV una quinta (§. 53.); fT una decima (§. 47.); sarà pure TV una decima; quindi la corda $TV = Tf = Tb = bA$. Ma è anche $Vb = TA$ (§. 53.). Dunque i due triangoli VTb, TbA avranno tutti i lati rispettivamente eguali, e saranno eguali (8. 4. lib. 1.).

PROBLEMA.

57. **D**ividere una circonferenza in 240. parti eguali.

Soluzione. Stanti le cose come al §. 43., per mezzo de' §§. 38., e 39. si divida
Fig. 12. egualmente in due l'arco NG in δ. Si può far questo facendo al raggio del cerchio $e\nu$ eguali le corde $\nu\beta$, $\beta\delta$. Saranno i due archi $P\delta$, $\delta\pi$ ciascuno una ducentoquarantesima. Vedi ancora §. 58.

Dimostrazione. Poichè sottraendo dalle due metà Nδ, Gδ gli archi eguali NP, Gπ (§. 43.); resterà Pδ = $\delta\pi$. Ma Pπ è una centoventesima (§. 43.); dunque ec.

58. Con una apertura di compasso presa dal punto δ ad un qualunque punto per esempio N della divisione già ottenuta al §. 43., si potrà proseguire a dividere in due tutte le parti centoventesime di quel §. Per esempio, con questa apertura fatto centro in p si dividerà l'arco $\varpi\,\varphi$; fatto centro in P, si dividerà l'arco φ G, e così via via.

59. I tre punti a, e b Fig. 12., ed e Fig. 11. sono sommamente osservabili. Poichè col mezzo di que'soli presi fuori della circonferenza abbiamo diviso la stessa in ducentoquaranta parti eguali, e siamo pure arrivati a determinare una ducentoquarantesima parte per via di sole cinque aperture di compasso, cioè AB, BD, Aa, aN, Ab. Potendo questi servire ad altri molti usi insigni nel seguito; troveremo per rapporto ad essi tre equazioni fondamentali, dalle quali ne ricaveremo a suo luogo altre dodici, e ne dimostreremo gli usi, quando ne verrà l'occasione.

PRO-

PROBLEMA.

o. **D**ividere un qualunque arco BC in
ig. due parti eguali in G.
3.

Soluzione. Col raggio AB, col quale è ſtato deſcritto l'arco BC, che ſi deve dividere, e coi centri B, e C, che ſono i due punti eſtremi dell'arco, ſi deſcrivano gli archi AD, AE. Si faccia a BC = AD = AE (§. 10.). Poi coi centri D, ed E, e col raggio DC = BE ſi deſcrivano due archi, che ſi taglino in F. Ora col raggio AF, e cogli ſteſſi centri D, ed E ſi deſcrivano due altri archi, che ſi taglino in G. Sarà il punto G nella circonferenza, e sarà l'arco BG = GC.

Dimoſtrazione. Eſſendo eguali i lati riſpettivamente nei tre triangoli DBA, BAC, ACE; sarà l'angolo BCA = CAE (8. lib. 1.). Quindi BC parallela ad AE (28. lib. 1.). Quindi BAEC sarà un parallelogrammo (33. lib. 1.). Nella ſteſſa maniera ſi proverà, che è un parallelogrammo BCAD. Si ha poi nel parallelogrammo BCAD la diagonale AB eguale ai lati oppoſti BD, AC.

C

Dunque il quadrato della diagonale DC sarà eguale alla somma del quadrato dell' altra diagonale AB, e de' due quadrati de' due lati AD, BC (§. 25.); ossia sarà $(DC)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$. Essendo poi alla retta BC parallele le due DA, AE; i punti DAE saranno nella stessa retta. In oltre avendo i triangoli FAD, FAE tutti i lati eguali; saranno eguali gli angoli FAD, FAE (8. lib. 1.), e però entrambi retti (13. lib. 1.). Sarà dunque $(DF)^2 = (AD)^2 + (AF)^2$; ma $(DF)^2 = (DC)^2$. Dunque $(AD)^2 + (AF)^2 = (AB)^2 + 2(AD)^2$; e tolto $(AD)^2$ sarà $(AF)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$. Ma ad $(AF)^2 = (DG)^2$. Dunque $(DG)^2 = (AB)^2 + (AD)^2$. Ma perchè i triangoli GAD, GAE hanno i lati eguali; gli angoli GAD, GAE sono eguali, e retti (8., e 13. lib. 1.). Dunque $(DG)^2 = (AG)^2 + (AD)^2$. Dunque AB = AG; e però il punto G è nella circonferenza. Tolti poi dagli angoli retti GAD, GAE gli angoli eguali BAD, CAE; gli angoli BAG, GAC restano eguali. Dunque l'arco BC si è diviso egualmente in due in G (33. lib. 6.).

Avvertimento.

Se l' arco da dividersi fosse assai piccolo come bc, sarebbe meglio in pratica aggiungervi di qua, e di là archi eguali un poco grandi, come bB, cC, e tagliare poi per mezzo l' arco BC in G, dove sarà pure diviso per mezzo l' arco bc.

2. Se l' arco da dividersi fosse troppo grande come PGQ; sarebbe spediente togglier da esso di qua, e di là archi eguali PB, QC, acciocchè riuscisse mediocre l' arco di mezzo BC; quindi divider questo per metà in G, dove resterà pure diviso per metà l' arco PGQ.

g. 8.

3. Ecco dunque che tutto ciò, che appartiene alle divisioni della circonferenza, o degli archi del cerchio, e che si può eseguire col compasso, e colla riga, si può ancora ottenere col compasso solo.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO TERZO

DELLA MOLTIPLICAZIONE, E DIVISIONE DELLE DISTANZE IN LINEA RETTA.

PROBLEMA.

64. DUplicare la diſtanza AB.

Soluzione. Col centro A, raggio AB ſi
Fig. deſcriva una ſemicirconferenza BCDE;
2. cioè ſi faccia ad AB = BC = CD = DE (§. 10.). Sarà la BAE retta, e doppia della AB.

Dimoſtrazione. Vedi la 15. lib. 4.

PROBLEMA.

5. Triplicare, quadruplicare ec. una distanza AB.

Soluzione. Alla AB si aggiunga l'eguale
ig. AE (§. 64.). Collo stesso metodo
1. s' aggiunga l' eguale EV ec. Sarà la BAEV retta eguale a 3 AB. Collo stesso metodo seguitando si quadruplicherà ec.

Dimostrazione. La BAE è retta (15. lib. 4.); istessamente la AEV; dunque ec. ec.

PROBLEMA.

66. Dividere in due parti eguali la di-
ig. stanza AB, ossia trovare il punto M,
14. che è sulla retta AB alla sua metà.

Soluzione I. Descritta la semicirconferenza BCDE (§. 64.); col centro E raggio EB si descriva un arco indefinito PB*p*. Col centro B, raggio BA si descriva la semicirconferenza *p*AP*m*. Col centro P, raggio PB si descriva l'arco BM. Si faccia a P*m* = BM. Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. La retta Bm sarà sulla continuazione della Bp (15. lib. 4.). Sostituendo le tre eguali BP, Bp, Bm alle tre eguali Ap, pB, pS del §. 22., e le tre PE, BE, pE alle tre AQ, pQ, BQ, e la Pm alla AS; l'equazione AS . pQ = (Ap)^2 del §. 22. si cangerà nella Pm . BE = (BP)^2; ed essendo BE = 2 AB; BP = AB; sarà 2 AB . Pm = (AB)^2, e dividendo per AB; 2 Pm = AB = 2 BM. Sarà poi il triangolo BPM d'angoli eguali al triangolo BPm (8. lib. 1.). Quindi mP parallela alla BM (28. lib. 1.). Ma anche i due triangoli BPm, BPE hanno gli angoli eguali (§. 22.). Dunque mP è parallela alla BE (28. lib. 1.). Dunque le rette BM, BE coincidono.

Soluzione II. Col raggio AB, centro A
Fig. 15. si descriva la semicirconferenza BCDE (§. 64.). Collo stesso raggio, e coi centri B, ed E si segnino due archi indefiniti CP, DQ. Cogli stessi centri B, ed E, e col raggio BE si segnino i due archi EQ, BP. Col centro P, raggio PB si descriva l'arco BM. Col centro E, raggio PQ si tagli l'arco BM in M. Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. Fatte le debite sostituzioni nella Fig. 5. (§. 23.); si avrà PQ . BE = $(BE)^2 - (BP)^2$; ed essendo BE = 2AB; BP = AB; PQ = ME; sarà 2ME . AB = $4(AB)^2 - (AB)^2$ = $3(AB)^2$. Quindi dividendo per AB, si avrà 2ME = 3AB. Ma per essere eguali i lati opposti; sarà PQEM un parallelogrammo. Poichè diviso in due triangoli di lati eguali colla diagonale QM dà l'angolo PQM = QME (8. lib. 1.), e quindi PQ parallela ad ME (28. lib. 1.), così PM a QE (33. lib. 1.). E' poi anche PQ parallela alla BE (§. 23.). Dunque ME, BE coincidono. Essendo dunque perciò ME = MA + AE = MA + AB; sarà 2ME = 2MA + 2AB = 3AB; quindi 2MA = AB.

Soluzione III. Col centro A, raggio AB
Fig. 16. si descriva la semicirconferenza BCDE (§. 64.). Col centro B, raggio BE si descriva l'arco indefinito PE*p*. Col centro E, raggio EC si tagli questo in P, e *p*. Coi centri P, e *p*, e collo stesso raggio PE si descrivano due archi, che si taglino in M. Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. Il punto M sarà sulla retta BE (§. 13.); e sostituendo nell'equazione (§. 19.) $pP \cdot pQ = (Ap)^2$ le distanze, ossia le rette corrispondenti di questa Figura, ne verrà l'equazione $EM \cdot EB = (PE)^2$. Quindi a cagione di $(PE)^2 = (EC)^2 = 3(AB)^2$ (12. lib. 13.) (§. 2.), si avrà $2AB \cdot EM = 3(AB)^2$, e dividendo per AB; $2EM = 3AB$; ovvero $2AE + 2AM = 3AB$; e tolte le quantità eguali $2AE$, $2AB$, risulta $2AM = AB$.

Soluzione IV. Descritta la semicirconferenza BCDE (§. 64.); col centro B, e col raggio BD si descriva un arco indefinito aDp. Collo stesso raggio BD, centro E si tagli quest'arco in a. Col raggio Aa, e col centro E si tagli quest'arco aDp in P, e p. Collo stesso raggio Aa, e coi centri P, e p si segnino due archi, che si taglino in M. Sarà M il punto cercato.

Fig. 17.

Dimostrazione. Il punto M sarà sulla retta BE (§. 13.). Fatte poi le debite sostituzioni nell'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (§. 18.); si avrà $(PB)^2 = (PE)^2 + EB \cdot MB$; ossia $(BD)^2 = (Aa)^2 + 2AB \cdot MB$;

ossia $3(AB)^2$ (12. lib. 13.) (§. 2.) $=$ $2(AB)^2$ (§. 27.) $+$ $2AB.MB$. Quindi sottraendo $2(AB)^2$, risulta $AB = 2MB$.

Molte altre Soluzioni si possono dare a questo Problema o adoperando nuovi raggi di cerchio, o combinando tra loro le Soluzioni date quì sopra; ma stimo superfluo indicarle. Una assai semplice, ma che però in pratica non conduce a molta esattezza, perchè in essa l'intersezione degli archi si fa ad un angolo troppo acuto, è la seguente.

Soluzione V. Col raggio AB, centro A
Fig. descritta la semicirconferenza BCDE
14. (§. 64.); col centro E, raggio EB descritto l'arco indefinito PBp; col centro B, raggio BA tagliando quest' arco in P, e p; con questi centri P, e p, e collo stesso raggio BA si descrivano due archi, che si taglino in M. Sarà M il punto cercato.

Dimostrazione. Il punto M sarà sulla BE (§. 13.). Essendo poi simili i due triangoli isosceli PBM, PBE a cagione d'un angolo alla base comune in B (5., e 32. lib. 1. 4. lib. 6.); sarà BE : BP :: BP : BM; quindi (17. lib. 6.) $BE . BM = (BP)^2 = (AB)^2$, ossia $2AB . BM = (AB)^2$; quindi dividendo per AB, risulta $2BM = AB$.

PROBLEMA.

67. Proseguire a suddividere in due parti
Fig. eguali colla più semplice costruzione; la
18. A M in N; la A N in O; ec. all' infinito.

Soluzione I. Essendo stata descritta la semicirconferenza BCDE col raggio AB (§. 64.), e collo stesso raggio, e col centro B l'arco indefinito P′CAp'; coi centri E, e B, e col raggio BE i due archi R′Q′P′B$p'q'r'$, PQRErqp; col centro E raggio EC l'arco PCp; se coi centri P′, e p', raggio AB si descrivano due archi; essi si taglieranno in M al mezzo della AB (Soluz. V. §. 66.). Se coi due centri P, e p, raggio PE si descrivano due archi; essi si taglieranno pure nel medesimo punto M (Soluz. III. §. 66.).

Ora si faccia ad AP′ = BQ′ = Bq' = q'N = Q′N (§. 11.). Sarà il punto N alla metà della AM.

Si faccia ad AQ′ = BR′ = Br' = r'O = R′O. Sarà il punto O alla metà della AN.

Seguitando collo stesso metodo si dividerebbe A O in due parti eguali ec. all' infinito.

Dimostrazione. S'immagini una retta P'A, che divide in due la base BE del triangolo P'BE (§. 12.). Sarà $(BP')^2 + (P'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP')^2$ (§. 26). Quindi sostituiti i valori di $BP' = AB$, e di $P'E = 2AB$, e sottratto $2(AB)^2$; si avrà $3(AB)^2 = 2(AP')^2$, e quindi dividendo per 2, risulterà $(AP')^2 = (BQ')^2 = \frac{3}{2}(AB)^2$. Essendo poi N nella retta BE (§. 13.); sarà il triangolo isoscele Q'BN simile al triangolo isoscele Q'BE a cagione dell' angolo comune in B (5., e 32. lib. 1., e 4. lib. 6.). Quindi $(BQ')^2 = BN \,.\, BE$ (17. lib. 6.). Quindi paragonando tra loro i due valori di $(BQ')^2$, si avrà $\frac{3}{2}(AB)^2 = BN \,.\, BE = 2BN \,.\, AB$, e dividendo per $2AB$, si avrà $\frac{3}{4}AB = BN$. Dunque $AN = \frac{1}{4}AB$.

Istessamente si avrà $(BQ')^2 + (Q'E)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$ (§. 26.), quindi $\frac{3}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ')^2$, e riducendo si avrà $\frac{7}{4}(AB)^2 = (AQ')^2 = (BR')^2$. Ma $(BR')^2 = BO \,.\, BE = 2AB \,.\, BO$. Dunque $\frac{7}{4}(AB)^2 = 2AB \,.\, BO$, e quindi $\frac{7}{8}AB = BO$; ed $AO = \frac{1}{8}AB$ ec.

Soluzione II. Si faccia ad $AP = EQ = Eq = qN = QN$. Sarà il punto N alla metà della AM. Si faccia ad $AQ = ER = Er = rO = RO$. Sarà il punto O alla metà della AN. Seguitando collo ſteſſo metodo ſi dividerebbe in due la AO, così via via all' infinito.

Dimoſtrazione. Poichè ſi ha (§. 26.) $(PE)^2 + (PB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$, e ſoſtituiti i valori di $(PE)^2 = (CE)^2 = 3(AB)^2$ (12. lib. 3.) (§. 2.), e di $(PB)^2 = (BE)^2 = 4(AB)^2$; ſi ha $7(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AP)^2$. Quindi tolti via $2(AB)^2$, e dividendo per 2, ſi ha $\frac{5}{2}(AB)^2 = (AP)^2 = (EQ)^2$. Ma $(EQ)^2 = EN . EB$ a cagione de' triangoli isosceli ſimili EQN, EQB (§. 13.) (5., e 32. lib. 1. 4., e 17. lib. 6.). Dunque $\frac{5}{2}(AB)^2 = EN . EB = 2EN . AB$; e dividendo per $2AB$ ſi ottiene $\frac{5}{4}AB = EN$; ed $AN = \frac{1}{4}AB$.

Collo ſteſſo metodo ragionando ſi avrà $(QE)^2 + (QB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$. Quindi $\frac{5}{2}(AB)^2 + 4(AB)^2 = 2(AB)^2 + 2(AQ)^2$. Quindi pure $\frac{9}{4}(AB)^2 = (AQ)^2 = (ER)^2 = EO . EB = 2AB . EO$. Quindi dividendo per $2AB$, ſi ottiene $\frac{9}{8}AB = EO$; ed $AO = \frac{1}{8}AB$ ec.

Soluzione III. Col centro A raggio AB
Fig. 19. descritta la semicirconferenza BCDE (§. 64.), collo stesso raggio AB, e coi centri B, ed E descritti gli archi CP, Dp indefiniti; cogli stessi centri B, ed E, e col raggio BE descritti gli archi Epqr, BPQR; si sarà potuto trovare il punto M col fare PM = PB; EM = Pp (Soluz. II. §. 66.).

Ora si faccia ad AP = BQ = QN = Eq.
Si faccia pure a Qq = EN.
Sarà il punto N alla metà della AM.
Si faccia parimente ad AQ = BR = RO = Er.
Si faccia pure ad Rr = EO.
Sarà il punto O alla metà della AN.
Ec.

Dimostrazione. Fatte le dovute sostituzioni nella Fig. 5. (§. 23.); si avrà $Qq \cdot BE = (BE)^2 - (BQ)^2$. Ma $BE = 2AB$; $(BQ)^2 = \frac{3}{2}(AB)^2$ (Vedi la Dimostr. della Soluz. I.). Dunque $2Qq \cdot AB = 4(AB)^2 - \frac{3}{2}(AB)^2$, e dividendo per $2AB$, e riducendo si ha $Qq = \frac{5}{4}AB$. Dunque anche $EN = \frac{5}{4}AB$. Dunque essendo la AB la stessa nelle due Figure 18., e 19., saranno pure gli stessi i lati dei due triangoli Q'NE Fig. 18., QNE Fig. 19.

Quindi sovrapponendo i tre punti B, Q, E della Fig. 19. sovra i tre B, Q', E della 18., anche i punti N delle due Figure coincideranno. Dunque ec.

Istessamente facendo le dovute sostituzioni nella Fig. 5. (§. 23.) si ha $Rr . BE = (BE)^2 - (BR)^2$. Ma $(BR)^2 = \frac{1}{4}(AB)^2$ (Dimostr. della Soluz. I.); dunque $Rr . BE$ $(BE)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$. Ovvero sostituendo $2AB$ a BE; $2AB . Rr = 4(AB)^2 - \frac{7}{4}(AB)^2$. E dividendo per $2AB$, e riducendo si ha $Rr = \frac{9}{8} AB = OE$. Dunque coincidendo i punti E, R, B di questa Fig. 19. coi punti E, R', B della Fig. 18., ed essendo quì le RO, ed EO eguali rispettivamente alle R'O, EO della Fig. 18.; coinciderà anche il punto O. Quindi O sarà alla metà di AN. Nella stessa guisa si dimostrerebbe in seguito sino all' infinito.

Si potrebbero usare altre maniere di trovare gli stessi punti; ma passeremo ad altre divisioni della AB in un diverso numero di parti.

PROBLEMA.

68. **D**ividere in tre parti eguali la distanza A B.

Soluzione. Alla A B si aggiungano in
Fig. 20. linea retta di qua, e di là le due distanze A E, B V eguali alla A B (§. 64.). Coi centri E, ed V, e col raggio E V si descrivano due archi indefiniti Q V q, P E p. Cogli stessi centri E, ed V, e col raggio E B si descrivano due altri archi, che taglino i primi in Q, q, e P, p. Con questo stesso raggio E B, e coi centri P, p si descrivano due archi, che si taglino in T. Collo stesso raggio, e coi centri Q, q si descrivano due archi, che si taglino in t. Sarà la A B divisa in tre parti ne' due punti T, t.

Dimostrazione. I punti T, t saranno nella retta V E (§. 13.). Sarà poi il triangolo isoscele E P T simile all' isoscele E P V avendo un angolo comune in E (5, e 32. lib. 1. 4. lib. 6.). Dunque $(PE)^2 = ET \cdot EV$ (17. lib. 6.). Sostituendo in questa equazione a P E, 2 A B, e ad E V, 3 A B, ne verrà $\frac{1}{3}$ AB = ET; e quindi AT = $\frac{1}{3}$ AB. Nella stessa maniera si dimostrerà, che anche B*t* è un terzo di AB, e quindi anche T*t*.

PROBLEMA.

69. Dividere una distanza AB in un qualunque numero di parti eguali.

Soluzione. Da un esempio, o due si ri-
Fig. 21. leverà meglio la regola generale.

Esempio I. Sia la distanza AB da dividersi in cinque parti eguali. Ad essa si aggiungano in linea retta le quattro distanze eguali alla medesima AE, EF, FG, GH (§. 65.), in maniera che resti quintuplicata in BH, ossia moltiplicata per tante unità, in quante parti si vuole dividere la medesima. Cogli estremi B, ed H come centri, e col raggio AB della lunghezza della distanza, che si vuol dividere, si descrivano i due archi indefiniti AC, GI. Cogli stessi centri B, ed H, e col raggio BH si descrivano i due archi HI, BC. Col centro C, e col primo raggio

gio A B si descriva un arco indefinito B Q. Col raggio CI centro H si descriva un arco, che tagli l' arco BQ in Q. Sarà la distanza BQ sulla direzione della BA, e sarà la quinta parte di essa. Se adesso alla BQ si aggiunge l' eguale Q*q* (§. 64.), quindi le altre eguali *qr*, *r's*, si avranno determinate tutte le quinte parti della BA.

Esempio II. Se si vuole dividere la
Fig. 22. AB in sette parti; si formi la BH sette volte maggiore della BA. Cogli estremi di questa cioè coi punti B, ed H, e col raggio AB si descrivano gli archi indefiniti AC, GI. Cogli stessi centri B, ed H, e col raggio BH si descrivano i due archi HI, BC. Col centro C, e col primo raggio AB si descriva un arco indefinito BQ. Col raggio CI centro H si tagli quest' arco in Q; sarà BQ sulla direzione della BA, e sarà la settima parte di essa.

Dimostrazione. Essendo il triangolo CQI di lati rispettivamente eguali al triangolo IHQ; sarà l' angolo CIQ = IQH (8. lib. 1.), quindi CI parallela ad HQ (28. lib. 1.). Essendo poi la CI parallela anche alla BH

(§. 23.), sarà il punto Q sulla BH. Quindi avendo i due triangoli isosceli CBQ, CBH un angolo alla base comune in B; saranno simili (5., e 32. lib. 1. 4. lib. 6.), e sarà HB : BC : : BC : BQ, ossia HB : AB : : AB : BQ. Quante volte dunque la HB sarà maggiore della AB, altrettante la AB sarà maggiore della BQ.

Soluzione II. Si voglia dividere la AB
Fig. 23. per esempio in cinque parti. Determinata, come nella Soluz. I., la BH cinque volte maggiore della AB; col centro H, e col raggio HB si descriva un arco indeterminato CBc. Ora col raggio BA, e col centro B si descriva la semicirconferenza cCK (§. 64.). Collo stesso raggio AB, e col centro C si descriva l'arco BQ. Col raggio CK, e col centro B si tagli quest'arco in Q; sarà BQ la quinta parte della BA posta sulla stessa direzione.

Dimostrazione. La retta BK sarà sulla continuazione della Bc (15. lib. 4.). Fatte perciò le dovute sostituzioni nel §. 22., si avrà $KC . BH = (BC)^2 = (AB)^2$; e quindi (17. lib. 6.) BH : AB : : AB : KC. Ovvero BH : AB : : AB : BQ. Quanto dunque la BH sarà maggiore della AB, tanto la stessa AB sarà maggiore della BQ; e se sarà BH = 5AB, sarà anche AB = 5BQ. Per l'eguaglianza poi dei lati tra loro nei due triangoli BKC, BCQ si avrà l'angolo KCB = CBQ (8. lib. 1.). Ma all' angolo KCB è pur eguale l'angolo CBH (§. 22.). Dunque la BQ è sulla direzione della BH.

70. Si vede chiaramente, che quest' ultimo Problema (§. 69.) può molto servire nella pratica per dividere in linee un piede dato, e già diviso in pollici; poichè col metodo di esso essendo BH eguale a dodici pollici, riuscirà BQ eguale ad una dodicesima del primo pollice AB, cioè ad una linea. Nella stessa maniera il metro già diviso in decimetri si potrà suddividere in centimetri. Se sarà già descritta la retta AB, sulla quale si ha a trovare il punto Q; l'operazione sarà più semplice, poichè senza descrivere col centro C, raggio AB l'arco BQ, basterà tagliare in Q la data retta AB colle aperture di compasso indicate quì sopra.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO QUARTO

DELL' ADDIZIONE, E SOTTRAZIONE DELLE DISTANZE; DELLA SITUAZIONE DELLE PERPENDICOLARI, E DELLE PARALLELE.

71. L'Aggiungere, o togliere una distanza da un'altra data, che è così semplice, e facile a farsi col compasso, e colla riga, tirando una retta indefinita pei due estremi della prima distanza, e sopra essa aggiungendo, o togliendo la seconda distanza col compasso (3. lib. 1.), non è certo così pronta cosa, e spedita a farla col solo compasso; nè quì si propongono questi Problemi come di grande uso; ma solo perchè si vegga non poter esserci alcun Problema della Geometria Elementare, che non si possa anche sciogliere col compasso solo nel senso spiegato (§. 1.), il che si dimostrerà poi più rigorosamente a suo luogo, e perchè non manchi alcuno degli Elementi di questa nuova Geometria giusta la promessa (§. 7.).

PROBLEMA.

72. Dalla diſtanza AB togliere una di-
Fig. ſtanza eguale a CD.
24.

Soluzione. Col raggio CD, e col centro B (se la diſtanza ſi vuol togliere da quella parte) ſi descriva un cerchio FGEH. Col centro A, e con qualche raggio ſi descriva un arco, che tagli il cerchio in E, ed F. Si divida in due l'arco EGF (§. 60.) in G. Sarà il punto G sulla retta BA, e sarà GA il reſiduo.

Dimoſtrazione. Avendo i due triangoli EBG, FBG i lati eguali; sarà l'angolo EBG = FBG (8. lib. 1.). Sarà dunque l'angolo EBG eguale alla metà dell'angolo EBF. Avendo pure i lati eguali tra loro i due triangoli EBA, FBA; ſi proverà nella ſteſſa maniera, che anche l'angolo EBA è la metà dell'angolo EBF. Dunque l'angolo EBG è eguale ad EBA. Dunque il punto G è sulla BA. Ma è anche BG eguale alla CD. Dunque GA sarà il reſiduo della AB toltane la CD.

PROBLEMA.

73. Alla diſtanza A B aggiungere la diſtanza C D in linea retta.
Fig. 24.

Soluzione. Col centro B (se l'aggiunta ſi vuol fare da quella parte), e col raggio C D ſi descriva il cerchio FGEH. Col centro A, e con qualche raggio ſi descriva un arco, che tagli il cerchio in E, ed F. Si divida in due l'arco E H F in H (§. 60.). Sarà il punto H sulla retta A B; e sarà A H la somma delle due diſtanze A B, C D.

Dimoſtrazione. Per l'eguaglianza de' lati tra loro ne' due triangoli EBH, FBH, così pure ne' due triangoli E B A, F B A ſi troverà (8. lib. 1.) l'angolo EBH = FBH, e l'angolo EBA = FBA. Dunque EBH + EBA = FBH + FBA. Ma la somma di tutti queſti quattro angoli è eguale a quattro retti (13. lib. 1.). Dunque la loro metà, per esempio EBH + EBA, sarà eguale a due retti, e quindi la HBA sarà una retta (14. lib. 1.). E' poi BH = CD. Dunque AH = AB + CD.

PROBLEMA.

74. Sulla AB da B verso A collocare la
Fig. CD maggiore della AB.
25.

Soluzione. Col centro B, e col raggio CD si descriva un arco indefinito LMN, ovvero un cerchio intero. Col centro A, e con un raggio arbitrario si descriva un arco, che tagli il primo ne' due punti L, ed N. Si divida in due parti eguali l'arco LN (§. 60.) in M. Sarà la BM la stessa CD posta a quel luogo, che si voleva.

Dimostrazione. Col metodo delle dimostrazioni de' due Problemi precedenti (§§. 72., e 73.) si troverà, che essendo l'angolo LMA $=$ NMA (8. lib. 1.) $= \frac{1}{2}$ LMN; così pure LMB $=$ NMB $= \frac{1}{2}$ LMN; sarà LMA $=$ LMB, e quindi BAM retta. E' poi anche eguale a CD. Dunque ec.

Avvertimento.

75. Se l'arco descritto col centro A tagliasse ad angoli troppo acuti l'arco descritto col centro B; il che succede, quando AB è troppo piccola per rap-

porto a CD; alla BA si aggiunga l' eguale AE in linea retta, e l' arco LMN descritto col centro B si tagli con un arco descritto col centro E in L, ed M. Se anche in tal caso gli angoli de' due archi riuscissero troppo acuti; si triplichi, si quadruplichi, ec. (§. 65.) la retta BA da B verso A, fino a che l'ultimo suo punto preso per centro del secondo arco dia gli angoli d'intersezione in L, ed M più vicini all' angolo retto. Si faccia lo stesso in casi simili pei §§. 72., e 73.

PROBLEMA.

76. Dati i due punti A, e B; trovare
Fig. un punto H tale, che la retta BH sia
26. perpendicolare alla AB in B, ed eguale ad una data CD.

Soluzione. Col centro B, e colla distanza CD per raggio si descriva un cerchio FEHG. Col centro A, e colla distanza AB per raggio si descriva un arco, che tagli il cerchio in F, ed E. Si determini la semicirconferenza FEG (§. 64.). Si divida in due egualmente l' arco GE in H (§. 60.). Sarà H il punto cercato.

Dimostrazione. Per la simiglianza de' due triangoli GEB, EBA (§. 22.) sarà l'angolo GEB = EBA, e quindi GE parallela a BA (28. lib. 1.). Ma BH, che divide in due egualmente l'angolo GBE, è perpendicolare alla corda GE (9. 11. 12. lib. 1.). Dunque anche alla BA (28. lib. 1.). Ma è in oltre BH = CD. Dunque H è il punto cercato.

Se la AB fosse troppo minore della CD; si duplichi, o si triplichi ec. (§. 64. 65.).

PROBLEMA.

77. Dati i due punti A, e B; trovare
Fig. un punto D in guisa, che la DA sia
27. perpendicolare alla AB.

Soluzione. Preso un raggio arbitrario (per esempio la stessa AB); con esso, e coi due centri A, e B si descrivano due archi, che si taglino in C. Con questo stesso raggio, e col centro C si descriva la semicirconferenza BAD (§. 64.). Sarà D il punto cercato.

Dimostrazione. L'angolo DAB è nel semicerchio. Dunque è retto (31. lib. 3.).

PROBLEMA.

78. Dati i due estremi d'una retta AB, e un punto D fuori di essa; trovare un altro punto E, che determini la posizione della DE perpendicolare alla AB, e il punto M, dove la taglia.

Fig. 28.

Soluzione. Si faccia ad AD = AE, a BD = BE (§. 11.). Sarà E il primo punto cercato. Si divida DE per metà in M (§. 66.). Sarà M il secondo.

Dimostrazione. Resta dimostrata questa Soluzione dal §. 14.

PROBLEMA.

79. Trovare due punti di una retta, che sia perpendicolare al mezzo della DE.

Fig. 28.

Soluzione. Preso un raggio arbitrario, si faccia a questo = DA = EA. Preso lo stesso raggio, o un altro arbitrario, si faccia a questo dall'altra parte = DB = EB. Saranno A, e B i due punti cercati.

Dimostrazione. Resta dimostrata questa Soluzione dal §. 14.

PROBLEMA.

80\. Dati due punti A, e B d'una retta,
Fig. e un punto C fuori di essa, pel quale
29\. si voglia condurre una parallela alla AB; trovare un altro punto D, che ne determini la posizione.

Soluzione. Si faccia a CA = BD (§. 11.); BA = CD. Sarà D il punto cercato.

Dimostrazione. Nei due triangoli CDB, CAB, che hanno i tre lati eguali fra loro, l'angolo DCB è uguale all'angolo CBA (8. lib. 1.). Dunque CD è parallela ad AB (28. lib. 1.).

PROBLEMA.

81\. Dati due punti A, e B d'una retta,
Fig. e un punto C fuori di essa; collocare a
30\. questo punto C una distanza CE; cosicchè la retta CE sia parallela alla AB, e sia eguale ad una data MN.

Soluzione. Trovato un punto D della parallela, che passa per C col metodo del Problema precedente (§. 80.), sulla direzione di questa C D si ponga la M N sottraendola ad essa, se è minore (§. 72.), o aggiungendola dall'altra parte (§. 73.), o collocandola sopra essa da C verso D, se è maggiore (§. 74), secondochè richiederanno le condizioni del Problema.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

PROBLEMA.

82. Esaminare se i tre punti A, B, C sono in linea retta.

Fig. 31.

Soluzione. Coi centri A, e C, e con un raggio arbitrario, per esempio A C, si segnino due archi, che si tagliano in D, ed E. Si osservi, se sia DB = EB. Se ciò è; i tre punti A, B, C sono in linea retta. Altrimenti no.

Dimostrazione. Se è anche DB = EB, sarà l'angolo D A B = E A B = $\frac{1}{2}$D A E (8. lib. 1.), a cagione dei lati eguali tra loro ne'due triangoli D A B, E A B. Ma nei triangoli D A C, E A C per la stessa cagione sono eguali gli angoli DAC, EAC, e però eguali ciascuno alla metà dell' angolo DAE. Dunque sarà DAB = DAC; e quindi i tre punti A, B, C in linea retta. Se poi DB sia maggiore, o minore di EB; anche l' angolo DAB sarà maggiore, o minore dell' angolo EAB (25. lib. 1.), e quindi non potrà essere eguale all'angolo DAC, non potendo essere eguale alla metà dell' angolo DAE. Dunque i tre punti A, B, C non potranno essere in linea retta.

PROBLEMA.

83. Dati tre punti A, B, D esaminare se la DA sia perpendicolare ad AB.

Fig. 32.

Soluzione. Si duplichi la AB in BE (§. 64.) per via del semicircolo BPQE. Si osservi se sia DB = DE. Se lo è, l'angolo DAB è retto. Altrimenti non lo è.

Dimostrazione. Essendo retta la BAE diametro del cerchio; la DA farà con essa due angoli, la somma de' quali sarà eguale a due retti (13. lib. 1.). Ne' due triangoli poi DAE, DAB, che hanno i lati AE, AB eguali fra loro, e il lato AD comune, se il lato DE sarà eguale al lato DB; anche l' angolo DAE sarà eguale all' angolo DAB (8. lib. 1.), e però entrambi retti. Se poi DE sarà maggiore, o minore di DB; anche l' angolo DAE sarà maggiore, o minore dell' angolo DAB; quindi uno sarà acuto, e l' altro ottuso (25. lib. 1.).

PROBLEMA.

84. Esaminare se la retta, che passa per due punti dati D, F sia perpendicolare alla retta, che passa per altri due punti dati A, B.

Fig. 33.

Soluzione. Per via del punto D si trovi la perpendicolare DE alla AB (§. 78.). Si esamini, se i tre punti D, E, F sono in linea retta (§. 82.). Se sì; la DF è perpendicolare alla AB; altrimenti no.

Dimostrazione. Poichè la DE è perpendicolare per costruzione; se lo è anche la DF, sarà la stessa retta; poichè da un punto D ad una retta AB non si possono condurre due perpendicolari (Coroll. Prop. 32. lib. 1.).

PROBLEMA.

85. Dati due punti A, B d' una retta,
Fig. e due C, D d' un' altra; esaminare se
34. sieno parallele.

Soluzione. Si faccia ad AD = AE; a BD = BE (§. 11.). Si faccia pure ad AC = AF, a BC = BF. Si osservi, se sia DE = CF; se ciò è; saranno parallele; se no; convergeranno dalla parte della minore.

Dimostrazione. Le DE, CF sono perpendicolari alla AB, e sono tagliate per metà da essa in due punti M, ed N (§. 14.). Dunque sono duple rispettivamente delle distanze DM, CN dei punti D, e C dalla retta AB. Se dunque saranno eguali, le distanze saranno eguali, e quindi le AB, DC parallele; altrimenti convergeranno.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO QUINTO

DELLE DISTANZE PROPORZIONALI.

PROBLEMA.

86. TRovare una terza proporzionale
Fig. alle due distanze Qp, MN, delle quali
55. la prima Qp è maggiore della seconda
MN.

Soluzione. Col centro Q, e col raggio Qp si descriva un arco indefinito ApB. Col centro p, e col raggio MN si descriva la semicirconferenza BAS. Sarà AS la terza proporzionale.

Dimostrazione. Pel Lemma del §. 22. sarà $AS.pQ = (Ap)^2$. Dunque $AS.pQ = (MN)^2$. Quindi (17. lib. 6.) $pQ : MN :: MN : AS$.

PRO-

PROBLEMA.

87. Trovare una terza proporzionale alle
Fig. due distanze Qp, MN, delle quali la
36. prima è minore della seconda, ma però maggiore della metà di quella.

Avvertimento.

S' accorgeremo, che la Qp sia maggiore della metà della MN, se i due circoli descritti coi centri Q, e p, che sono gli estremi della prima distanza, e coi raggi Qp, ed MN, che sono le due distanze date, si taglino tra loro come nella Figura.

Soluzione. E' la stessa, che la precedente applicata alla Fig. 36.

Dimostrazione. E' la stessa, che la precedente.

88. Se il circolo pbQ' descritto col centro
Fig. Q, e col raggio Qp non si tagliasse in
37. alcun punto col circolo descritto col centro p, e col raggio MN, come nella Fig. 37.; servirà il Problema seguente.

PROBLEMA.

89. Trovare una terza proporzionale alle
Fig. due distanze Qp, MN, delle quali la
37. prima è minore della metà della seconda.

Soluzione. Col centro p, raggio MN si descriva un arco indefinito BAS. Col centro Q, raggio Qp si descriva la semicirconferenza pbQ' (§. 64.). Col centro Q', raggio $Q'p$ si descriva un arco indefinito. Se quest' arco taglia l'arco BAS in due punti B, ed A; si determini la semicirconferenza BAS' (§. 64.). Col metodo dello stesso §. 64. alla AS' si aggiunga in linea retta un' eguale $S'S$. Sarà AS la terza proporzionale cercata.

Dimostrazione. Si ha (§. 22.) $AS' . pQ' = (Ap)^2 = (MN)^2$. Ma $pQ' = 2pQ$. Dunque $2AS' . pQ = (MN)^2$; ossia $AS . pQ = (MN)^2$. Quindi (17. lib. 1.) $pQ : MN :: MN : AS$.

90. Se nemmeno l'arco pcQ'' descritto col cen-
Fig. tro Q', e col raggio $Q'p$ tagliasse l'arco BAS
38. descritto col centro p, e col raggio MN;

si determini la semicirconferenza pcQ''; col centro Q'', e col raggio $Q''p$ si descriva un arco indefinito. Se questo taglia l'arco BAS in due punti A, e B; si determini la semicirconferenza BAS' (§. 64.). Si quadruplichi AS' (§. 65.), e sia $AS = 4AS'$. Sarà questa la terza proporzionale cercata.

Dimostrazione. Poichè si ha (§. 22.) $AS'.pQ'' = (Ap)^2 = (MN)^2$. Quindi $4AS'.pQ = (MN)^2 = AS.pQ$. Quindi (17. lib. 6.) $pQ : MN :: MN : AS$.

91. Nella stessa guisa si procederebbe oltre, se nemmeno la distanza $Q''p$ fosse maggiore della metà della MN; cioè si prenderebbe una distanza dupla di essa, e ottupla di Qp, e si ottuplicherebbe la AS', che ne venisse determinata. Questa distanza ottupla della AS' sarebbe la terza proporzionale cercata, e così via via.

La dimostrazione è come le precedenti.

92. Anche nel caso che la prima distanza Qp fosse bensì maggiore della metà della seconda MN, ma di poco, giovera duplicarla, perchè le intersezioni de' due cerchj si facciano ad angoli non tanto acuti, ma più vicini al retto (§. 9.).

PROBLEMA.

93. Trovare la quarta proporzionale alle
Fig. tre distanze PQ, RS, TV.
39.

Soluzione. Con un medesimo centro O, e colle due prime distanze prese per raggi si descrivano due cerchj, cioè col raggio PQ il cerchio BC, e col raggio RS il cerchio DE. Colla terza distanza TV presa per raggio, e fatto centro in qualche punto B della prima circonferenza, si segni un arco, che la tagli in C. Con un raggio arbitrario fatto centro in B si segni un arco, che tagli la seconda circonferenza in D. Collo stesso raggio BD fatto centro in C si tagli la stessa circonferenza in un prossimo punto E. Sarà DE la quarta proporzionale.

Dimostrazione. A cagione dei lati eguali tra loro nei due triangoli COE, BOD si avrà l' angolo COE = BOD (8. lib. 1.). E tolto da entrambi (o aggiunto) l'angolo BOE, si avrà l' angolo COB = EOD. Sarà dunque anche la somma degli angoli OCB, OBC eguale alla somma degli angoli

OED, ODE (32. lib. 1.). Ma i due triangoli COB, EOD sono isosceli. Saranno dunque le due semisomme, ossia gli angoli alla base, eguali (5. lib. 1.). Quindi i triangoli saranno simili (4. lib. 6.), e si avrà CO : DO : : CB : DE; ossia PQ : RS : : TV : DE.

Avvertimento I.

94. Gioverà prendere il raggio arbitrario BD in guisa, che l'angolo BDO riesca vicino al retto (§. 9.), il che si può fare ad occhio.

Avvertimento II.

95. Se la terza distanza TV non si potesse collocare come corda in BC, il che avverrà, quando la TV sarà maggiore di due volte la PQ; converrà duplicare le due distanze PQ, RS (§. 64.), e con esse così duplicate descrivere i due cerchj BC, DE, e fare tutto il resto come sopra (§. 93.). Se ciò nemmeno bastasse; converrebbe triplicarle ec. Gioverà pure duplicarle, o triplicarle ec., quando la TV si potesse

bensì applicare per corda al primo cerchio, ma essa fosse quasi eguale al diametro di quello; e ciò per ischivare le sezioni ad angoli acuti, e ottenerne delle altre più vicine all'angolo retto.

Ciò resta dimostrato dall'essere PQ : RS :: 2PQ : 2RS :: 3PQ : 3RS ec. Quindi avendosi fatto come 2PQ, a 2RS, ovvero come 3PQ, a 3RS ec. così BC, a DE, sarà sempre come PQ ad RS; così BC a DE; cioè come PQ ad RS, così TV a DE (4. lib. 5.).

PROBLEMA.

96. Dividere la MN in P in parti proporzionali alle due distanze date PQ, RS.
Fig. 40.

Soluzione. Alla PQ si aggiunga in linea retta la QV eguale alla RS (§. 73.). Alle tre PV, MN, PQ si trovi la quarta proporzionale (§. 93.), la quale si collochi sulla MN in MP, il che si fa sottraendola dalla MN (§. 72.). Sarà fatto.

Dimostrazione. Essendo PV : MN : : PQ : MP, sarà ancora PV : MN : : QV : PN (5. lib. 5.). Sarà dunque PQ : MP : : QV : PN. Quindi (16. lib. 5.) PQ : QV : : MP : PN; ossia PQ : RS : : MP : PN.

PROBLEMA.

97. Dividere la AB in estrema, e media
Fig. ragione.
41.

Soluzione. Col centro A, raggio AB si descriva il cerchio BD*d*. Si faccia nella sua circonferenza ad AB = BC = CD = DE = E*d*. Si faccia a BD = B*a* = E*a*. Si faccia ad A*a* = D*b* = *db*. Sarà la AB divisa in *b* in estrema, e media ragione, e si avrà BA : A*b* : : A*b* : *b*B.

Dimostrazione. Vedi il §. 46.

98. Anche quest' ultimo Problema (§. 97.) è uno di quelli, i quali si sciolgono molto più semplicemente col solo compasso, che col compasso, e colla riga insieme, come si può vedere confrontando questa Soluzione colle Soluzioni Geometriche conosciute. La Dimostrazione tuttavia riesce più complicata.

PROBLEMA.

99. Tra le due diſtanze date AB, e CD
Fig. trovare la media proporzionale.
42.

Soluzione. Sulla AB ſi aggiunga ad eſſa la CD da B in H (§. 73.). Si divida per metà la AH in F (§. 66.). Alla BF ſi aggiunga in linea retta l'eguale B*f* (§. 64.). Coi centri F, *f*, e col raggio FA ſi descrivano due cerchj, che ſi taglino in M. Sarà BM la media proporzionale.

Dimoſtrazione. Eſſendo i punti *f*, B, F sulla ſteſſa retta HA, ed eſſendo eguali rispettivamente i lati dei due triangoli MB*f*, MBF, sarà l'angolo MB*f* = MBF (8. lib. 1.), e però entrambi retti (13. lib. 1.). Sarà dunque la MB perpendicolare al diametro HA del semicerchio HMA. Quindi (13. lib. 6.) AB : BM : : BM : BH, oſſia AB : BM : : BM : CD.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO SESTO

DELLE RADICI.

PROBLEMA.

100. Fig. 43. TRovare facilmente le radici dei numeri interi dall'uno fino al dieci, prendendo per unità la distanza A B.

Soluzione. Col raggio A B si descriva il cerchio B D *d*; si faccia nella sua circonferenza ad A B = BC = C D = D E = E *d* = *d c*. Coi centri B, ed E, e col raggio B D si segnino degli archi, che si taglino in *a*, ed *a*. Collo stesso raggio B D, e coi centri D, e *d* si segnino due archi, che si taglino in V. Col raggio A *a*, e col centro B si tagli la circonferenza in F. Coi centri

B, ed F, e col raggio AB si segnino due archi, che si taglino in T. Si avrà

$AB = \sqrt{1}$	$aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$

Dimostrazione. Si è dimostrato essere $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.). Dunque $Aa = \sqrt{2}$. Si è dimostrato essere $BD = \sqrt{3}$ (§. 2.). Si ha poi $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Avendo poi i due triangoli BTA, TAF i lati eguali tra loro; sarà l'angolo BTA = TAF (8. lib. 1.). Quindi BT parallela ad FA (28. lib. 1.), e però anche la BT si troverà perpendicolare a BA, come la FA (§. 27.) (27. lib. 1.). Avendo poi il punto A, e il punto E la stessa distanza dai punti D, e *d*, così pure il punto B, e il punto V; saranno i quattro punti B, A, E, V sulla stessa retta (§. 13.), e sarà EV = BA (§. 14.). Sarà dunque $(ET)^2 = (TB)^2 + (BE)^2$ (47. lib. 1.) $= (AB)^2 + 4(AB)^2 = 5$; quindi $ET = \sqrt{5}$. Istessamente $(aV)^2 = (Aa)^2 + (AV)^2$. Ma essendo $EV = BA$; è ancora $AV = BE = 2AB$; quindi $(AV)^2 = 4(AB)^2 = 4$; ed è $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.). Dunque $(aV)^2 = 6$;

ed $aV = \sqrt{6}$. Confrontando poi i punti C, B, c, A, V coi punti A, p, B, P, Q della Fig. 3., e fatte le sostituzioni nell' equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (§. 18.), si otterrà $(CV)^2 = (CB)^2 + BV \cdot AV = 1 + 3 \cdot 2 = 7$. Quindi $CV = \sqrt{7}$. Essendo pure $Aa = A\alpha$ (§. 14.); sarà $(a\alpha)^2 = 4(Aa)^2 = 8$. Quindi $a\alpha = \sqrt{8}$. Si ha poi $BV = 3 = \sqrt{9}$. Finalmente essendo $(TV)^2 = (TB)^2 + (BV)^2 = 1 + 9 = 10$; si ha $TV = \sqrt{10}$.

PROBLEMA.

101. Per via delle radici trovate nel Problema precedente trovare le altre radici de' numeri interi dal 10 fino al 36.

Fig. 44.

Soluzione. Si sottragga il numero, del quale si vuole la radice dal numero quadrato prossimamente maggiore, che sarà il 16, o il 25, o il 36. Colla radice del residuo, la quale si troverà nella lista del §. 100. presa per raggio, e con un centro A si descriva la semicirconferenza QLR (§. 64.). Colla radice del numero quadrato prossimamente maggiore presa per raggio, la quale si troverà col metodo del §. 65., e coi centri Q, ed R si descrivano due archi, che si taglino in P. Sarà AP la radice cercata.

Per esempio si voglia la radice del 29. Sottratto questo dal 36, lascia di residuo 7. Col raggio $CV = \sqrt{7}$ (§. 100.) descritta la semicirconferenza QLR, e coi centri Q ed R, e col raggio $= 6$ segnati due archi, che si taglino in P; sarà $AP = \sqrt{29}$.

Dimostrazione. Essendo retto l'angolo PAQ (§. 83.); sarà $(PQ)^2 = (AQ)^2 + (AP)^2$ (47. lib. 1.). Quindi togliendo $(AQ)^2$, si avrà $(PQ)^2 - (AQ)^2 = (AP)^2$. Ora posto $(PQ)^2 = 36$, e $(AQ)^2$ eguale successivamente ai numeri interi dall' unità fino al 10, si avrà $(AP)^2$ eguale successivamente dal 36 in giù fino al 25. Dunque per AP si avranno successivamente le radici di questi numeri. La radice poi di 25 è 5, e si ha dal §. 65. Posto $(PQ)^2 = 25$, si avranno collo stesso metodo le radici dal 25 in giù fino al 16, e posto $(PQ)^2 = 16$, si avranno le altre dal 16 in giù fino al 10.

Nell' esempio addotto si avrà $(PQ)^2 - (AQ)^2 = 36 - 7 = (AP)^2 = 29$. Quindi $AP = \sqrt{29}$.

PROBLEMA.

102. Trovare le radici di tutti i numeri interi.

Soluzione. E' chiaro, che adoperando lo stesso metodo del §. 101. colle radici acquistate con esso si potranno avere altre radici di numeri superiori, e con queste altre, e così successivamente fino in infinito. Abbiamo già dunque il modo di ottenere le radici di tutti i numeri interi.

PROBLEMA.

103. Trovare la radice di qualunque numero rotto.

Soluzione. Si trovi la radice del denominatore (§. 102.), poi quella del numeratore. Si faccia come la prima radice alla seconda, così l'unità ad una quarta proporzionale (§. 93.). Sarà questa la radice cercata.

Dimostrazione. Poichè se il denominatore sia d; il numeratore sia n; se si farà $\sqrt{d} : \sqrt{n} :: 1 :$ quarta proporzionale; sarà questa quarta $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$. Ma $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$. Dunque ec.

PROBLEMA.

104. Trovare facilmente le metà delle radici dei numeri interi dall' uno sino al venticinque.
Fig. 45.

Soluzione. Preso il raggio AB eguale ad uno, col centro A si descriva il cerchio B D d, e nella sua circonferenza si faccia ad AB = BC = CD = DE = Ed.

Col centro B, e col raggio BD si descriva un arco, che passi pei punti a, N, D, d, n, α.

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi pei punti a, M, C, m, α.

Col raggio Aa, e col centro B si descriva un arco, che passi pei punti M, F, Q, q, m.

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi pei punti N, F, P, *p*, *n*.

Col raggio AB, e col centro B si descriva un arco, che passi per P, e *p*.

Collo stesso raggio, e col centro E si descriva un arco, che passi per Q, e *q*.

Collo stesso raggio, e col centro P si descriva un arco, che passi per R, e tagli la circonferenza in S; col centro *p* si segni un altro arco, che tagli il primo in R, e la circonferenza in *s*.

Collo stesso raggio, e coi centri Q, *q* si descrivan due archi, che si taglino in T, e taglin la circonferenza in O, ed *o*.

Collo stesso raggio, e col centro *a* si tagli con un arco la circonferenza in *g*. Col centro R si tagli con un arco la circonferenza in L, ed *l*. Coi centri O, ed *o* si segnino due archi, che si taglino in H. Coi centri H, e T si segnino due archi, che si taglino in V, ed *v*. Sarà

RA	$=\frac{1}{2}\sqrt{1}$		HF	$=\frac{1}{2}\sqrt{13}$
RQ	$=\frac{1}{2}\sqrt{2}$		EO	$=\frac{1}{2}\sqrt{14}$
RD	$=\frac{1}{2}\sqrt{3}$		L*l*	$=\frac{1}{2}\sqrt{15}$
RP	$=\frac{1}{2}\sqrt{4}$		BE	$=\frac{1}{2}\sqrt{16}$
RF	$=\frac{1}{2}\sqrt{5}$		H*a*	$=\frac{1}{2}\sqrt{17}$
AM	$=\frac{1}{2}\sqrt{6}$		HN	$=\frac{1}{2}\sqrt{18}$
Q*q*	$=\frac{1}{2}\sqrt{7}$		HD	$=\frac{1}{2}\sqrt{19}$
A*a*	$=\frac{1}{2}\sqrt{8}$		*ag*	$=\frac{1}{2}\sqrt{20}$
BR	$=\frac{1}{2}\sqrt{9}$		*d*V	$=\frac{1}{2}\sqrt{21}$
BL	$=\frac{1}{2}\sqrt{10}$		HS	$=\frac{1}{2}\sqrt{22}$
*p*S	$=\frac{1}{2}\sqrt{11}$		M*m*	$=\frac{1}{2}\sqrt{23}$
BD	$=\frac{1}{2}\sqrt{12}$		M*n*	$=\frac{1}{2}\sqrt{24}$

$$HE=\tfrac{1}{2}\sqrt{25}\,.$$

Dimostrazione. Se si confrontino i punti P, B, *p*, R, E di questa Figura coi punti A, *p*, B, P, Q della Fig. 3. per mezzo dell' equazione del §. 18. $(AQ)^2=(Ap)^2+pQ\,.\,PQ$, si otterrà l'equazione per questa Figura $(PE)^2=(PB)^2+BE\,.\,RE$; ossia $(Aa)^2=(AB)^2+2AB\,.\,RE$; ossia (§. 27.) $2=1+2RE$. Quindi $RE=\frac{1}{2}AE$, e poichè R è sulla stessa retta BAE (§. 13.), sarà anche $RA=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1}$.

Essendo il punto T alla metà della AB per la stessa ragione, colla quale si è dimostrato, che il punto R è alla metà della AE; sarà

AT

$AT = RE$, quindi confrontandosi i punti di questa Fig. 45. Q, T, q, E, R coi punti A, q, B, Q, P della Fig. 3., il punto A della Fig. 45. sarà il punto p della Fig. 3. Dunque dall'equazione del §. 16. $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$ si ricaverà per questa Fig. 45. l'equazione $(QE)^2 = (RQ)^2 + (RE)^2 + AR \cdot RE$; ossia sostituendo i valori numerici $1 = (RQ)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Quindi $(RQ)^2 = \frac{1}{4} \cdot 2$; $RQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Confrontando i punti D, A, d, E di questa Figura 45. coi punti P, A, p, B della Fig. 3., resterà dimostrato dal §. 14., che le due AE, Dd si taglino vicendevolmente in due parti eguali. Ma la AE è tagliata in due parti eguali in R; dunque anche la Dd. Ma $Dd = BD = \sqrt{3}$ (§. 2.). Dunque $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Si ritenga, che la DRd è anche perpendicolare alla AE (§. 14.).

Si ha poi $RP = 1$. Dunque $RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$.

Essendo retto l'angolo FAR (§. 27.); si ha $(RF)^2 = (FA)^2 + (AR)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Dunque $RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Essendo la base BAE del triangolo BME tagliata per metà dalla retta AM; si avrà pel §. 26. $(BM)^2 + (EM)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2$; cioè $(Aa)^2 + (BD)^2 = 2(AB)^2 + 2(AM)^2$; cioè $2 + 3 = 2 + 2(AM)^2$. Quindi $6 = 4(AM)^2$; $\sqrt{6} = 2\,AM$; $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Essendosi confrontati qui sopra i punti Q, T, q, E, R, A di questa Fig. 45. coi punti A, q, B, Q, P, p della Fig. 3., risulterà dal §. 13. essere in questa Fig. 45. $AQ = Aq = QR = Rq$. Per le stesse ragioni risulterà essere eguali tra loro, ed a queste quattro le quattro AP, Ap, PT, Tp. Avendo dunque i due triangoli isosceli PTA, QAR tutti i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $PAT = QRA$ (8. lib. 1.), ed essendo TAR retta, sarà PA parallela a QR (29. lib. 1.). Quindi anche PQ eguale, e parallela alla AR (33. lib. 1.).

Ma Qq è perpendicolare alla AR (§. 14.). Dunque anche alla PQ (27. lib. 1.). Si hanno poi nei due triangoli PAT, RAq i due angoli PAT, RAq eguali (8. lib. 1), e TAR retta. Dunque essendo eguali a due retti i due angoli PAT, PAR (13. lib. 1.), lo saranno anche i due PAR, RAq. Quindi sarà retta anche la PAq (14. lib. 1.). Dunque $(Pq)^2 = (2RQ)^2 = (PQ)^2 + (Qq)^2$ (47. lib. 1.); cioè $2 = \frac{1}{4} + (Qq)^2$; quindi $\frac{7}{4} = (Qq)^2$, e $Qq = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Si ha poi $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.) $= \frac{8}{4}$. Quindi

$$Aa = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{8}.$$

Si ha pure $BR = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9}$.

Se si confrontino i punti B, L, R, l, A di questa Figura 45. coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3.; dall'equazione $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$ del §. 16. si ricaverà l'equazione per questa Figura 45. $(BL)^2 = (LA)^2 + (AB)^2 + AR \cdot AB$; ossia $(BL)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{4}$. Quindi $BL = \frac{1}{2}\sqrt{10}$.

I due triangoli PSA, PBA hanno i lati rispettivamente eguali. Dunque si ha l'angolo SPA = PAB (8. lib. 1.). Quindi sono parallele le PS, BA (28. lib. 1.). Ma la Pp taglia ad angoli retti la BR (§. 14.). Dunque sarà perpendicolare anche alla PS (27. lib. 1.). Nella stessa maniera poi, che si è dimostrato essere $(Qq)^2 = \frac{7}{4}$, si dimostrerà pure essere $(Pp)^2 = \frac{7}{4}$. Quindi avendosi $(pS)^2 = (Pp)^2 + (PS)^2$ (47. lib. 1.); si avrà $(pS)^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4}$; quindi $pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

Si ha poi $(BD)^2 = 3$ (§. 2.) $= \frac{12}{4}$. Quindi $BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$.

Si ha pure $(HF)^2 = (HA)^2 + (AF)^2$; e dimostrandosi la QO parallela alla BE nella stessa guisa, che si è dimostrato della PS; saranno i punti O, P, Q, S nella stessa retta, e $PO = QO - PQ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = PQ$. Essendo dunque OP eguale, e parallela tanto alla TA, quanto alla TB; saranno eguali, e parallele anche le OT, PA; e le due OB, PT fra loro (33. lib. 1.). Ma si è dimostrato quì sopra essere PT = PA. Dunque sarà anche a queste $= OT = OB$. Per la stessa ragione dall' altra parte le oT, oB saranno eguali alla $pA = PA$. Se ora si confrontino i punti O, o, A, T, B, H coi punti A, B, Q, P, p, q della Fig. 3., si ricaverà dal §. 14. essere $HB = AT = \frac{1}{2}$. Sarà dunque $(HA)^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$; quindi $(HF)^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$, e $HF = \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Se si confrontino i punti E, O, H, o, A coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3.; dall'equazione $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$ del §. 16., si ricaverà per questa Figura $(EO)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 + HA \cdot AE = 1 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4}$. Quindi $EO = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

In seguito se si confrontino i punti A, R, L, Q, q, l di questa Fig. 45. coi punti A, B, Q, P, p, q della Fig. 3., avendosi (§. 15.) l'equazione per la Fig. 3. $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$, e moltiplicando per 4, $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$, ossia $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$; si ricaverà per questa Figura 45. $(Ll)^2 = 4(AL)^2 - (AR)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$, quindi risulta $Ll = \frac{1}{2}\sqrt{15}$.

Si ha poi $BE = 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}\sqrt{16}$.

Per l' angolo retto aAH (§. 27.) si ha $(Ha)^2 = (HA)^2 + (Aa)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{17}{4}$; quindi $Ha = \frac{1}{2}\sqrt{17}$.

Dimostrandosi nella stessa guisa essere $(AN)^2 = \frac{3}{2}$, come si è dimostrato di $(AM)^2$; così pure $(An)^2 = \frac{1}{2}$; a cagione che NR taglia per metà la base AE del triangolo ANE, si avrà (§. 26.) $(AN)^2 + (NE)^2 = 2(AR)^2 + 2(RN)^2$; cioè $\frac{1}{2} + 2 = \frac{6}{4} + 2(RN)^2$; e riducendo si trova $(RN)^2 = \frac{1}{2} = (AN)^2$. Egualmente si trova $(Rn)^2 = \frac{1}{2}$. Se ora si confrontano i punti H, N, R, n, A di questa Figura 45. coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3.; dall' equazione $(AQ)^2 = (AP)^2 + (PQ)^2 + Pp \cdot PQ$ del §. 16., si ricaverà per la Figura 45. l'equazione $(HN)^2 = (AN)^2 + (AH)^2 + AR \cdot AH$, cioè $(HN)^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$. Quindi risulta $HN = \frac{1}{2}\sqrt{18}$.

Essendo la DR perpendicolare alla AE, cioè alla HR; sarà $(HD)^2 = (HR)^2 + (RD)^2$ (47. lib. 1.) $= 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$; quindi $HD = \frac{1}{2}\sqrt{19}$.

Essendo la base aAa del triangolo aga tagliata per mezzo dalla retta gA; si avrà (§. 26.) $(ag)^2 + (ag)^2 = 2(Aa)^2 + 2(Ag)^2$; ossia $(ag)^2 + 1 = 4 + 2$; e $(ag)^2 = 5 = \frac{20}{4}$; quindi $ag = \frac{1}{2}\sqrt{20}$.

Essendo i due triangoli HTV, AED di lati eguali tra loro; quindi l'angolo VTH = DEA (8. lib. 1.), ed essendo i punti H, T, A, E sulla stessa retta; sarà la VT parallela alla sua eguale DE (29. lib. 1.), quindi anche la VD parallela, ed eguale alla TE (33. lib. 1.). Ma la Dd è perpendicolare alla AE, cioè alla TE; dunque anche alla VD (27. lib. 1.). Quindi

$(dV)^2 = (VD)^2 + (Dd)^2 = (TE)^2 + (BD)^2 = (\frac{3}{2})^2 + 3$ (§. 2.) $= \frac{9}{4} + \frac{12}{4} = \frac{21}{4}$; Quindi $dV = \frac{1}{2}\sqrt{21}$.

Essendosi dimostrata la PS eguale, e parallela alla A E; così la ps per la stessa ragione; sarà anche la S E eguale, e parallela alla A P (33. lib. 1.); così la sE alla Ap. Per l'eguaglianza, e parallelismo delle tre PS, TR, ps si proverà istessamente l'eguaglianza delle RS, Rs alle PT, pT entrambe dimostrate eguali alla $AP = RQ$. Confrontando ora i punti H, S, E, s, R di questa Figura coi punti Q, A, p, B, P della Fig. 3., dall'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + pQ \cdot PQ$ (§. 18.) si ricaverà per questa Figura 45. $(HS)^2 = (SE)^2 + EH \cdot RH = (RQ)^2 + EH \cdot RH = \frac{2}{4} + \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{22}{4}$. Quindi $HS = \frac{1}{2}\sqrt{22}$.

Essendo la base A E del triangolo A M E divisa per metà dalla M R, si avrà (§. 26.) $(AM)^2 + (EM)^2 = 2(RA)^2 + 2(RM)^2$; cioè $\frac{6}{4} + 3 = \frac{2}{4} + 2(RM)^2$. Quindi riducendo risulta $(RM)^2 = 2 = (BM)^2 = (Bm)^2$; del qual valore si dimostra nella stessa guisa essere $(Rm)^2$. Quindi $BM = MR = Rm = mB$. Se ora si confrontano i quattro punti B, M, R, m di questa Figura coi quattro punti A, Q, B, q della Figura 3.; avendosi dal §. 15. $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$, e quindi $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$, cioè $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$;

si avrà per questa Figura 45. $(Mm)^2 = 4(BM)^2 - (BR)^2 = 8 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{32}{4} - \frac{9}{4} = \frac{23}{4}$; quindi $Mm = \frac{1}{2}\sqrt{23}$.

Essendo i triangoli BME, BnE di lati eguali tra loro, ed avendo entrambi la base comune BE divisa in due egualmente dalle AM, An; dall' equazione del §. 26. risulterà lo stesso valore per le due AM, An. Avendo dunque i triangoli BAM, EAn i lati tra loro eguali, sarà l'angolo BAM $=$ EAn (8. lib. 1.). Quindi a cagione della retta BAE essendo la somma dei due angoli MAB, MAE eguale a due retti (13. lib. 1.), sostituendo all' angolo MAB il suo eguale EAn, sarà anche la somma dei due angoli MAE, EAn eguale a due retti. Quindi le due MA; An faranno una sola retta (14. lib. 1.). Sarà dunque $(Mn)^2 = 4(AM)^2 = \frac{24}{4}$. Quindi $Mn = \frac{1}{2}\sqrt{24}$.

Finalmente $HE = \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{25}$.

105. Essendo $\frac{1}{2}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$; per esempio $\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$ ec., si avranno facilmente da questo Problema le radici di tutti i quarti dall' un quarto fino al venticinque quarti; il che sarà di uso nella costruzione delle Figure simili, come vedremo.

106. Se si fosse preso il raggio AB $= 2$;

si sarebbero ottenute tutte queste distanze doppie di valore; quindi avremmo avute le radici intere de' numeri dall' uno fino al venticinque. Si potrebbe però facilmente raddoppiare qualunque di quelle mezze radici, che si volesse, per avere l' intera (§. 64.).

107. La facilità di questa costruzione, che si eseguisce coi soli tre compassi delle tre aperture già osservate (§. 35.)

la prima $= \sqrt{1}$
la terza $= \sqrt{2}$
la seconda $= \sqrt{3}$

coi quali si è già diviso il cerchio in 24 parti eguali, ed ora si sono trovate 25 radici successive dei primi numeri; mostra l' eccellenza della Geometria del Compasso, e quanto possa servire alla perfezione delle Arti.

108. Nella costruzione precedente si ha avuto riguardo ad impiegare più che fosse possibile il primo compasso di apertura $= 1$, col quale si è descritta la circonferenza BDd, il quale conservando l' apertura fondamentale, merita più degli altri fiducia. Così pure non si è voluto impiegare che i tre primi

compassi più rimarcabili (§. 107.). Ciò ha fatto, che alcune poche sezioni degli archi sono riuscite di angoli alquanto acuti, come quelle dei punti S, *s*, O, *o*, e più quelle dei punti L, ed *l*. Chi volesse avere tutti gli angoli d'intersezione più vicini all'angolo retto, si potrà servire della seguente

Altra costruzione della Figura 45.

109. Trovati come nella Soluzione del §. 104. i punti M, ed *m*; col raggio B D, e coi centri M, ed *m* si descrivano due archi, che si taglino in H.

Col raggio A B, e col centro H si descriva un arco, che tagli la circonferenza in O, ed *o*. Collo stesso raggio si determinino le semicirconferenze O E *s*, *o* E S (§. 64.).

Col raggio B E, e col centro H si tagli la circonferenza in L, ed *l*.

Tutti gli altri punti della Figura si trovino come al §. 104.

Dimostreremo, che i punti, che si trovano con questa costruzione, sono gli stessi dell'altra.

Essendosi dimostrato (§. 104.), che BM = MR = Rm = mB, e che i tre punti B, A, R sono nella stessa retta; essendo anche MH = ME = mH = mE per costruzione; H sarà sulla stessa retta BAR (§. 13.), e si avrà HB = RE (§. 14.). Dunque H sarà lo stesso punto, che nell' altra costruzione. Essendo poi eguali le HO, Ho nelle due costruzioni; anche i punti O, o saranno gli stessi. Se si sottrae l' arco osE dalle due semicirconferenze BsE, oES; si avranno gli archi residui Bo, ES eguali. Quindi ES = Bo = BO = AQ = RQ. Quindi anche il punto S sarà il medesimo che prima. Egualmente lo sarà il punto s. Essendo poi la base HTR del triangolo HLR divisa in due egualmente dalla LT; si avrà (§. 26.) $(HL)^2 + (LR)^2 = 2(HT)^2 + 2(TL)^2$; cioè $4 + (LR)^2 = 2 + 2(TL)^2$, cioè $2 + (LR)^2 = 2(TL)^2$. Ma essendo ancora la base TR del triangolo TLR divisa per metà in A dalla retta LA; si avrà (§. 26.) $(TL)^2 + (LR)^2 = 2(TA)^2 + 2(AL)^2$, e duplicando $2(TL)^2 + 2(LR)^2 = 4(TA)^2 + 4(AL)^2 = 1 + 4 = 5$; quindi sottraendo $2(LR)^2$, si ha $2(TL)^2 = 5 - 2(LR)^2$. Ma si è trovato quì sopra $2(TL)^2 = 2 + (LR)^2$. Dunque $5 - 2(LR)^2 = 2 + (LR)^2$. E sottraendo 2, e aggiungendo $2(LR)^2$; si ha

$3 = 3(LR)^2$; quindi $1 = (LR)^2 = (AB)^2$. Sarà dunque $LR = AB$ come nella prima costruzione. Lo stesso si proverà di Rl. Gli altri punti sono determinati come prima. Dunque tutti i punti della Figura sono gli stessi di prima.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO SETTIMO

DELLA INTERSEZIONE DELLE RETTE COGLI ARCHI DI CERCHIO, E TRA LORO.

PROBLEMA.

110. DAti due punti L, ed M d'una retta, e il centro A col raggio AB d'un arco BCD; trovare i due punti P, e Q, nei quali la LM taglia il detto arco, se pure lo taglia.

Fig. 46.

Soluzione. Coi due punti L, ed M dati nella retta presi per centri, e colle rispettive loro distanze MA, LA dal dato centro prese per raggi si descrivano due archi, che si taglino in V. Col centro V, e col dato raggio AB si descriva un arco indefinito EFG.

Se questo taglia l'arco dato in P, e Q, questi due punti saranno i cercati. Se non lo tagliasse; nemmeno la retta LM taglierebbe l'arco dato.

Dimostrazione. Essendo eguali tra loro le quattro distanze AP, AQ, VP, VQ, e le due tra loro, AM, VM; i tre punti P, M, Q saranno nella stessa retta (§. 13.). Nella stessa guisa si dimostra, che sono nella stessa retta i tre punti Q, P, L. Dunque la retta LM passa per P, e Q, quando questi punti d'intersezione vi siano.

Se il cerchio EFG descritto col raggio AB,
Fig. e col centro V non tagliasse il cerchio
47. BCD; la LM non taglierebbe questo stesso cerchio. Poichè se si concepisca la retta VA, che tagli i cerchj in C, ed F; divisa per metà la CF in *m*; sarà V*m* = *m*A. Dunque la LM taglierà perpendicolarmente la VA in *m* (§. 14.) fuori del cerchio BCD. Se si piglia un qualunque altro punto P nella retta LM; nel triangolo rettangolo P*m*A si avrà il lato PA maggiore di *m*A, perchè opposto ad un angolo maggiore (32., e 18. lib. 1.). Sarà dunque molto più fuori del circolo il punto P del punto *m*. Dunque in nissun punto la retta LM taglierà il circolo BCD.

PROBLEMA.

111. Dato un arco BCD descritto col
Fig. centro A; trovare i due punti, dove
48. taglia la circonferenza la retta, che passa
per A, e per un altro punto dato L.

Soluzione. Col centro L, e con un raggio arbitrario LP si descriva un arco, che tagli l'arco BCD in P, e Q. Si divida l'arco PQ per metà in *m* (§. 60.). Si determini la semicirconferenza *m*D*n* (§. 64.). Saranno *m*, ed *n* i due punti cercati.

Dimostrazione. Essendo nella stessa distanza dai due punti P, e Q i tre punti A, *m*, ed L, saranno nella stessa retta (§. 13.). Ma nella retta *m*A si trova anche il punto *n* estremo del diametro *mn* (15. lib. 4.). Dunque ec.

PROBLEMA.

112. Dati due punti A, B d'una retta,
Fig. e due punti C, D d'un'altra; trovare
49. il punto S dove si tagliano.
e
50.

Soluzione. Coi due punti d'una delle due rette, per esempio coi punti A, e

B presi per centri, e colle distanze rispettive di essi punti AC, AD; BC, BD dai due punti dell'altra retta C, D prese per raggi si descrivano quattro archi, due dei quali si tagliano in C, e c, e due in D, e d.

Si trovi il quarto punto δ del parallelogrammo C D d δ col fare a Dd = Cδ; a DC = $d\delta$ (§. 11.).

Si trovi la quarta proporzionale alle tre $c\delta$, CD, Cc.

Con questa presa per raggio, e coi centri C, e c si descrivano due archi, che si taglino in S. Sarà S il punto dell'intersezione delle due rette A B, C D.

Dimostrazione. Le rette A B, Cc saranno perpendicolari una all'altra (§. 13. 14.); così pure le A S, Cc. Dunque il punto S sarà nella stessa A B. Essendo poi la A B, ossia AS perpendicolare anche alla Dd (§. 13. 14.), sarà la stessa Dd parallela alla Cc (29. lib. 1.). Ma pei lati eguali tra loro nei due triangoli dCδ, dCD si hanno gli angoli dCδ, CdD eguali (8. lib. 1.). Dunque sono parallele anche le due Cδ, Dd (28. lib. 1.). Dunque i punti c, C, δ sono nella stessa retta. Ora a cagione dei due lati eguali nei due triangoli C B A, cB A si avranno eguali gli angoli CBA, cBA (8. lib. 1.). Per la stessa ragione nei triangoli ABD, AB*d* si trovano eguali gli angoli ABD, AB*d*. Dunque nella Figura 49. l'angolo cB*d*, che è la somma dei due cBA, AB*d*, sarà eguale all'angolo CBD somma dei due CBA, ABD. Nella Figura 50. poi l'angolo cB*d*, che è la differenza dei due AB*d*, cBA, sarà pure eguale all'angolo CBD, che è la differenza dei due ABD, CBA. In tutte due le Figure adunque nei due triangoli cB*d*, CBD, che hanno due lati, e l'angolo compreso eguale, sarà il terzo lato c*d* eguale al terzo CD (4. lib. 1.). Ma $CD = d\delta$. Dunque il triangolo $cd\delta$ è isoscele. E' poi isoscele anche il triangolo cCS, e si ha la proporzione: la $c\delta$ alla CD, ovvero alla $d\delta$, come la Cc alla CS; onde viene ancora $c\delta : cd :: cC : cS$. Dunque i due triangoli $c\delta d$, cCS hanno gli angoli eguali tra loro (5. lib. 6.). Quindi essendo l'angolo $c\delta d = cCS$; sarà la CS parallela alla δd (29. lib. 1.), alla quale essendo pur parallela la CD, sarà in essa il punto S. Dunque ec.

DELLA

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO OTTAVO

DELLA COSTRUZIONE, E MOLTIPLICAZIONE, E DIVISIONE DEGLI ANGOLI, E DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.

Avvertimento.

113. QUando noi diremo: *costruire un* Fig. 51. *angolo* a b c *col compasso*, s' intenderemo di dire: *trovare col compasso tre punti* a, b, c; *ovvero dato alcuno di essi trovare gli altri in guisa, che volendo poi guidare per due di essi* a, b *una retta, e per uno di essi due* b, *e pel terzo* c *un' altra retta; si abbia un angolo* a b c *della quantità, che si vuole*. Benchè l' angolo *abc* non sia veramente costrutto, se non quando si sono guidate attualmente le rette *ab*, *bc*,

per tirare le quali non può baſtare il compaſſo solo; non oſtante per brevità adopreremo speſſo la prima frase, intendendoſi, che equivalga nel sentimento alla seconda.

PROBLEMA.

114. Essendo dato un angolo ABC per via dei tre punti A, B, C; e dati due altri punti *b*, ed *a*; trovare un punto *c*, coſicchè l'angolo *abc* ſia eguale ad ABC.

Fig. 51.

Soluzione. Trovata (§. 93.) una quarta proporzionale alle tre diſtanze AB, *ab*, BC; con queſta presa per raggio, e col centro *b* ſi descriva un arco, che paſſi per *c*. Trovata pure una quarta proporzionale alle tre AB, *ab*, AC, con eſſa per raggio, e col centro *a* ſi descriva un altro arco, che tagli il primo in *c*. Sarà l'angolo $abc = ABC$.

Dimoſtrazione. Poichè i due triangoli ABC, *abc* hanno i lati proporzionali; avranno eguali gli angoli oppoſti ai lati proporzionali (5. lib. 6.).

115. Servirà adunque la Soluzione del Problema precedente (§. 114.) a sciogliere anche il Problema: Dati i tre punti A, B, C estremi agli angoli di un triangolo, e due *a*, *b* estremi di un altro, trovare il terzo estremo *c* in guisa, che il triangolo *abc* riesca simile al triangolo A B C.

Fig. 51.

PROBLEMA.

116. Duplicare, triplicare, quadruplicare ec. un angolo dato B A C (§. 113.).

Fig. 52.

Soluzione. Col centro A, e coi raggi AB, AC si descrivano due archi indefiniti BDF, CE. Si faccia a CB = CD. Sarà l'angolo BAD duplo di BAC.

Si faccia a CD = DE. Sarà l'angolo BAE triplo di BAC.

Si faccia a DE = EF. Sarà BAF quadruplo di BAC ec.

Per quadruplicarlo si poteva ancora fare a BD = DF.

Dimostrazione. Avendo i triangoli BAC, CAD, DAE, EAF ec. tutti i lati rispettivamente eguali; saranno eguali gli angoli BAC, CAD, DAE, EAF ec. (8. lib. 1.). Dunque ec. Quindi essendo l'angolo BAD = DAF, sarà anche BD = DF (4. lib. 1.).

PROBLEMA.

117. Esaminare se l'angolo BAG dato per via dei tre punti B, A, G sia semiretto.

Fig. 53.

Soluzione. Col raggio AB, centro A si descriva la semicirconferenza BFE (§. 64.). Si faccia a GB = GF (§. 10.). Se sarà BF = FE; l'angolo BAG sarà semiretto. Se sarà BF minore, o maggiore di FE; l'angolo BAG sarà minore, o maggiore di un semiretto.

Dimostrazione. Poichè l'angolo BAF è duplo dell'angolo BAG (§. 116.); se l'angolo BAG è semiretto, sarà retto BAF; quindi BF = FE (§. 85.). Altrimenti se BAG è minore, o maggiore di un semiretto; sarà BAF minore, o maggiore di un retto; quindi BF minore, o maggiore di FE (24. lib. 1.).

PROBLEMA.

118. Dividere per metà l'angolo BAC
Fig. dato pei tre soli punti B, A, C, nei
54. quali A è disugualmente lontano da B, e da C.

Soluzione. Col centro A raggio AB sia descritto l'arco BMD. Si faccia a CB = CD. Si divida l'arco BMD per metà in M (§. 60.). Si divida l'arco BM per metà in N. Sarà l'angolo BAN la metà dell'angolo BAC.

Dimostrazione. Essendo l'angolo BAD duplo di BAC (§. 116.), e duplo parimente di BAM (33. lib. 6.); sarà l'angolo BAC lo stesso, che BAM. Ma l'angolo BAN è la metà di BAM. Dunque ec.

PROBLEMA.

119. Dato l'arco BC descritto col centro A; trovare il suo seno, il coseno, la tangente, e la secante.
Fig. 55.

Soluzione. Nella circonferenza descritta col raggio AB si faccia a BC = Bc. Si divida per metà la Cc in M (§. 66.). Sarà CM il seno, MA il coseno. Col centro M, raggio MA si descriva un arco, che tagli, se può, la circonferenza in D, e *d*. Si determini la semicirconferenza *d*D*δ* (§. 64.). Per lo stesso §. si aggiunga alla BA la sua eguale BV. Coi centri A, ed V, e col raggio D*δ* si descrivano due archi, che si taglino in S. Sarà BS la tangente, SA la secante.

Dimostrazione. La BA taglia la Cc ad angoli retti per metà in M (§. 14.). Dunque CM è il seno, MA è il coseno dell' arco BC. La SB è perpendicolare alla AB (§. 83.). La D*δ* è terza proporzionale alle due AM, AC (§. 87.); quindi anche la sua eguale AS. Dunque nei due triangoli rettangoli

AMC, ABS si ha la proporzione $AM : AC :: AB : AS$, ed invertendo (4. lib. 5.) $AC : AM :: AS : AB$. Quindi (35. lib. 5.) $(AC)^2 : (AM)^2 :: (AS)^2 : (AB)^2$. E sostituendo ad $(AC)^2$, e ad $(AS)^2$ i loro valori tratti dalla 47. lib. 1., si avrà $(AM)^2 + (MC)^2 : (AM)^2 :: (AB)^2 + (BS)^2 : (AB)^2$. Quindi (17. lib. 5.) $(MC)^2 : (AM)^2 :: (BS)^2 : (AB)^2$. Quindi (34. lib. 5.) $MC : AM :: BS : AB$. Quindi anche i lati MC, BS sono proporzionali. Si avrà dunque l'angolo MCA lo stesso, che BAS (5. lib. 6.). Quindi i punti ACS saranno nella stessa retta, e BS sarà la tangente, ed AS la secante dell'arco BC.

Se il cerchio descritto col centro M raggio MA non tagliasse la circonferenza, o la tagliasse ad angoli troppo acuti, converrebbe ricorrere al §. 89., o al §. 90., e 91.

Altra Soluzione per aver la tangente, e la secante.

Si determini la semicirconferenza BCE (§. 64.). Col raggio BC, centro E si tagli questa in Q. Col raggio CQ, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in V. Collo stesso rag-

Fig. 56.

gio CQ centro V si tagli la circonferenza in e. Col raggio Ee, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in m. Collo stesso raggio Ee centro m si descriva la semicirconferenza ABS (§. 64.). Sarà SB la tangente, SA la secante.

Dimostrazione. Se sia l'arco BCF eguale al quadrante $=$ FE; per essere BC $=$ QE; sarà anche CF $=$ FQ. Sarà poi per le definizioni trigonometriche il seno dell'arco CF la stessa cosa, che il coseno dell'arco BC. La corda poi dell'arco CFQ doppio dell'arco CF sarà doppia del seno dell'arco CF, ossia del coseno dell'arco BC. Questa corda è CQ $=$ AV. Si ha poi (§. 22.) $AV \cdot Ee = (AB)^2$. Per essere poi retta la AmS (§. 64.) $= 2Ee$, e $AV = 2\,\text{cosen.}\,BC$; si avrà $2Ee \cdot \text{cosen.}\,BC = (AB)^2 = AS \cdot \text{cos.}\,BC$. Quindi $\text{cos.}\,BC : AB :: AB : AS$ (17. lib. 6.). Sarà dunque AS terza proporzionale al coseno, ed al raggio; e però sarà eguale alla secante, secondo le dimostrazioni trigonometriche. E' poi retto l'angolo ABS (31. lib. 3.). Sarà dunque AS la secante nella sua posizione, e quindi BS la tangente.

PROBLEMA.

120. Dato il seno mn d' un arco di un
Fig. 56. raggio dato A B; trovare quest' arco.

Soluzione. Descritto il cerchio C c K col raggio A B, si trovi una dupla della mn (§. 64.). Con essa presa per raggio, e fatto centro in qualche punto C della circonferenza si descriva un arco, che la tagli in c. Si divida l' arco C c per metà in B (§. 60.). Sarà B C l' arco cercato.

Dimostrazione. Il seno dell' arco B C per la definizione trigonometrica è la metà della corda dell' arco doppio di B C. Dunque ec.

PROBLEMA.

121. Dato il coseno ma d' un arco di un
Fig. 57. raggio dato A B; trovare quest' arco.

Soluzione. Descritto il cerchio C c K col raggio A B si trovi una dupla della ma (§. 64.). Fatto centro in qualche punto c della circonferenza con questa dupla presa per raggio si tagli la circonferenza in K. Si determini la semicirconferenza KcC (§. 64.). Si divida per metà l'arco Cc in B (§. 60.). Sarà BC l'arco cercato.

Dimostrazione. Sia guidata l'altra corda Cc. Essa sarà divisa per metà in M ad angoli retti dal raggio AB (§. 14.). Ma anche l'angolo CcK è retto (31. lib. 3.), essendo nel semicerchio CcK. Dunque i due triangoli CMA, CcK, che hanno un angolo comune in C, e l'altro retto, sono equiangoli tra loro (32. lib. 1.), e si ha (4. lib. 6.) CM : Cc :: MA : cK. Ma CM è la metà di Cc. Dunque MA $=$ $\frac{1}{2}c$K $= ma$. E' poi MA il coseno dell' arco BC. Dunque ec.

PROBLEMA.

122. Data la tangente sb di un arco di
Fig. raggio dato AB; trovare quest'arco.
55.

Soluzione. Descritto col raggio AB il cerchio BCδ; alla AB si ponga in B perpendicolare la BS $= bs$ (§. 76.). Si trovi il punto C, dove la SA taglia la circonferenza (§. 111.). Sarà BC l'arco cercato.

Questa Soluzione non ha bisogno di dimostrazione.

PROBLEMA.

123. Data la secante *sa* di un arco di raggio dato AB; trovare quest' arco.

Fig. 55.

Soluzione. Descritta col raggio AB la circonferenza BCδ, e posta sulla AB l' eguale BV (§. 64.), coi centri A, ed V, e col raggio *sa* si descrivano due archi, che si taglino in S. Si trovi il punto C, dove la SA taglia la circonferenza (§. 111.). Sarà BC l' arco cercato.

Dimostrazione. La SB sarà perpendicolare alla BA (§. 83.); dunque sarà la tangente dell' arco BC, e quindi SA la secante.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO NONO

DELLE FIGURE SIMILI, E DEI POLIGONI REGOLARI.

Avvertimento.

124. Quando diremo: *costruire una figura, o un poligono*, s' intenderemo di dire: *trovare tutti que' punti, che bastano a determinare la posizione, e la grandezza di quelle rette, che si devono guidare per costruire interamente il poligono.*

PROBLEMA.

125. Sopra un dato lato *ab* costruire un
Fig. triangolo simile a un dato triangolo
31. ABC.

Soluzione. Vedi il §. 115.

PROBLEMA.

126. Costruire una Figura simile ad una
Fig. data ABCEFD, che abbia un dato
58. rapporto di area con essa.

Soluzione. Si voglia per esempio, che la nuova Figura abbia due quinti di area della Figura data. Con un raggio AB il maggiore, che si possa comodamente, si costruisca la Figura 43. (§. 100.). Presa da essa Figura la Aa = $\sqrt{2}$ per raggio, e fatto centro in O (Fig. 58.), si descriva il cerchio minore, nella di cui circonferenza è il punto v. Presa dalla Figura 43. la ET = $\sqrt{5}$ per raggio, collo stesso centro O si descriva il cerchio maggiore, nella di cui circonferenza è il punto V, il quale si marchi in tal luogo per rapporto al punto v, che la Vv riesca press' a poco tangente al cerchio interno in v.

Si supponga divisa la Figura data in tanti triangoli ABC, ACD, CDE, EDF, immaginandovi delle rette AC, CD ec.

Si pongano dei numeri 1, 2, 3, 4, 5 ec. alle distanze AB, AC, BC, CD ec., che misurano i lati di questi triangoli.

Si applichino queste distanze 1, 2, 3 ec. successivamente come corde a tanti archi successivi del cerchio V, cioè la AB da V in 1; la AC da 1 in 2; la BC da 2 in 3, ec. fino in fine; il che si fa prendendo la distanza AB per raggio, e fatto centro in V tagliando questa stessa circonferenza con un arco in 1, ec.

Colla distanza V *v* presa per raggio si faccia centro successivamente nei punti 1, 2, 3, 4, ec., e si descrivano degli archi, che taglino successivamente la circonferenza minore in 1, 2, 3, 4, ec. fino in fine.

Le corde del cerchio interno, ossia le distanze da *v* ad 1, da 1 a 2, da 2 a 3, da 3 a 4, ec. saranno i lati *ab*, *ac*, *bc*, *cd*, ec. della nuova Figura, la quale si costruirà triangolo per triangolo. Colla distanza da *v* in 1 si marcheranno i due punti *ab*. Coi centri *a*, e *b*, e colle distanze seconda, e terza prese dal cerchio interno (la seconda è dall' 1 al 2; la terza dal 2 al 3) si segneranno due archi, che si taglino in c. Coi centri c, ed a, e colle distanze quarta, e quinta prese dal cerchio interno (la quarta è dal 3 al 4; la quinta dal 4 al 5) si segneranno due archi, che si taglino in d. Nella stessa maniera si troveranno i punti e, ed f, e sarà costruita la Figura.

Dimostrazione. Le corde del cerchio interno stanno alle rispettive corde del cerchio esterno, come sta il raggio Ov al raggio OV (§. 93.), cioè come $\sqrt{2}$ sta a $\sqrt{5}$. Dunque nella stessa ragione stanno tutti i lati dei triangoli della Figura $abcefd$ ai rispettivi lati dei triangoli della Figura ABCEFD. Dunque i triangoli delle due Figure sono tra loro equiangoli, e simili (5. lib. 6. def. 1.). Dunque le due stesse Figure poligone sono simili (20. lib. 6.), ed essendo la proporzione, ossia ragione delle aree dei poligoni duplicata della ragione dei lati (ivi); sarà l'area del poligono $abcefd$ all'area ABCEFD come 2 a 5. Sarà dunque l'area della Figura minore eguale a due quinti della maggiore.

Da quest' esempio si vede cosa si dovrà fare, qualunque altro sia il rapporto, nel quale si voglia, che l'area della Figura da costruirsi sia alla data. Si descriveranno due circonferenze v, ed V, i raggi delle quali ſtaranno tra loro nel rapporto delle radici dei numeri, che formano il rapporto delle aree. Nella circonferenza, che corrisponde alla Figura data, ſi porranno succeſſivamente per corde i lati dei triangoli, nei quali ſi suppone divisa la Figura data. Per via di queſte col metodo indicato ſi troveranno delle corde proporzionali nell' altra circonferenza. Queſte saranno i rispettivi lati dei triangoli della nuova Figura.

Il rapporto delle mezze radici, e delle intere eſſendo lo ſteſſo, servirà in molti caſi la Fig. 45. (§. 104.). Per gli altri caſi vedi i §§. 101., 102., e 103.

Si sceglie poi un raggio AB, che ſia il
Fig. poſſibile maggiore comodamente, perchè
44. i due cerchj ſieno meglio capaci delle
e
45. grandezze delle corde da applicarviſi, e perchè le intersezioni, che ne nascono, faccian angoli più vicini al retto.

127. Se il rapporto foſſe dato tra i lati
Fig. AB, ed ab di eſſi tra loro, o di
58. qualunque altre due rette fra loro; in queſto rapporto ſi ſceglierebbono i due raggi OV, Ov, i maggiori poſſibili.

PROBLEMA.

128. Iscrivere ad un cerchio dato un poligono regolare tra quelli, che si possono iscrivere ad esso col compasso, e colla riga.

Soluzione. Si divida la circonferenza in un numero di parti eguali al numero de' lati del poligono, che si vuole (§. 27., 29., 30., 31., 32., 38., 40., 41., 42., 53., 57., 60., 63.). I punti della divisione saranno i vertici del poligono regolare cercato (§. 124.), e le corde degli archi saranno i lati.

Dimostrazione. Tutti i lati sono eguali, perchè sono corde di archi eguali. Anche gli angoli sono eguali, poichè essendo alla circonferenza insistono ad un egual numero di archi eguali (21. lib. 3.). Dunque si ha un poligono regolare del numero, che si voleva di lati iscritto al cerchio (Defin. 1. lib. 3.).

129. Essendo 240. le parti (§. 57.), nelle quali con tre punti soli presi fuori della circonferenza si può dividere essa

circonferenza con sei aperture di compasso al più (§. 59.); tanti saranno i poligoni regolari, che con questi tre punti, e sei aperture di compasso si potranno iscrivere al cerchio, quanti sono i diversi numeri, che dividono esattamente il 240. Ora questi numeri sono i seguenti 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240. Dunque ommettendo il 2, si potrà iscrivere un poligono regolare di 3 lati, di 4 lati, di 5, di 6, di 8, di 10, ec. fino al poligono di 240. lati.

130. Se il numero dei lati del poligono, che si vuole, si trova essere uno di quelli, pei quali si è divisa la circonferenza ai §§. 27., 30., e seguenti, per esempio il 12. si divida la circonferenza in 12. parti eguali §. 31.; i due punti estremi di ciascuna di queste saranno ai vertici degli angoli del poligono, che si vuole iscrivere; ossia, ciò che è lo stesso, le corde di questi archi saranno i lati del poligono. Se il numero dei lati del poligono, che si vuole, non si trovasse espressamente nei

Problemi del Libro secondo: come per esempio se si volesse costruire un poligono di sessanta lati; si duplichi, si triplichi, o si quadruplichi ec. questo numero, finchè si arrivi ad avere uno dei numeri, che si contengono espressamente nei Problemi; nell'esempio addotto si duplichi il 60, e si avrà 120; il qual numero si trova espressamente al §. 42., dove si dà il modo di dividere la circonferenza in 120 parti eguali. Queste parti prendendole a due a due ci somministreranno 60 archi eguali; le corde dei quali saranno i 60 lati del poligono, che si voleva. Se si avesse dovuto triplicare il numero, come nel caso, che si fosse voluto un poligono di 16 lati; divisa allora la circonferenza in 48 parti (§. 38.) numero triplo del 16, si dovranno prendere tre di questi archi per avere un arco, che sia la sedicesima parte della circonferenza; ognuno di questi archi eguali avrà per corda un lato del poligono di sedici lati, ed angoli.

PROBLEMA.

131. Ad un cerchio dato BCD*d* circo-
Fig. scrivere un triangolo equilatero (§. 124.).
59.

Soluzione. Si faccia al raggio di questo cerchio AB = BC = CD; a BD = BL = DL = D*d* = DN = *d*N = *d*M = BM.

I tre punti L, M, N saranno i vertici del triangolo equilatero circoscritto al cerchio.

Dimostrazione. Il triangolo BD*d* è equilatero iscritto al cerchio (§. 29. 130.). Ai lati di questo hanno eguali i lati i triangoli DLB, ND*d*, *d*BM; dunque saranno eguali i loro angoli (8. lib. 1.). Perciò i tre angoli ND*d*, *d*DB, BDL saranno eguali ai tre angoli del triangolo iscritto, cioè a due retti (32. lib. 1.). Quindi la NDL sarà retta (14. lib. 1.). Lo stesso si dimostrerà delle altre due LBM, N*d*M. Saranno poi ciascuna di esse dupla del lato BD, dunque eguali tra loro. Dunque il triangolo LMN è equilatero. Essendo poi gli angoli ND*d*, DLB eguali, sarà la D*d* parallela alla LB (§. 29. lib. 1.), ossia alla LM. Ora i punti

N, A, B sono in una retta perpendicolare alla D*d* (§. 13. 14.). Dunque la AB è perpendicolare anche alla LM (27. lib. 1.). Dunque la LM è tangente del cerchio (16. lib. 3.). Lo stesso si dimostrerà delle due NL, NM. Dunque il triangolo NLM è equilatero circoscritto al cerchio (Defin. 2. lib. 4.).

PROBLEMA.

132. Ad un dato cerchio circoscrivere un quadrato.

Fig. 60.

Soluzione. Si divida la sua circonferenza in quattro parti eguali nei punti B, F, E, *f* (§. 27.). Con questi punti presi per centri, e col raggio AB si segnino degli archi, che si taglino in R, S, T, V. Saranno questi ultimi quattro punti i vertici del quadrato circoscritto al cerchio.

Dimostrazione. L'angolo TBA è retto (§. 100.). Nella stessa guisa si dimostra essere retto l'angolo SBA. Dunque TBS è una retta (14. lib. 1.) perpendicolare al diametro BE, e però tangente al cerchio (16. lib. 3.). Lo stesso si dimostra delle altre TFV, VER, R*f*S. Avendo poi il triangolo BFT i lati eguali rispettivamente ai lati del triangolo BFA; sarà l'angolo BTF = BAF (8. lib. 1.); quindi retto (§. 27.). Lo stesso si dimostra degli altri angoli V, R, S. Dunque ec.

PROBLEMA.

133. Ad un dato cerchio circoscrivere un pentagono regolare.

Soluzione. Sia il cerchio BDE descritto col raggio AB. Si divida la sua circonferenza in cinque parti eguali (§. 40.) nei punti B, C, D, E, F. Fatto centro in uno di questi punti C, col raggio CB si descriva la semicirconferenza BDP (§. 64.). Preso per centro il punto E opposto all'arco CB, col raggio EC si tagli l'arco BDP in *p*. Col raggio P*p*, e coi centri B, C, D, E, F si segnino degli archi, che si taglino in

Fig. 61.

b, *c*, *d*, *e*, *f*. Saranno questi ultimi punti i vertici degli angoli del pentagono circoscritto al cerchio.

Per dimostrazione di questo Problema servirà la dimostrazione del seguente

PROBLEMA.

134. Dati i vertici d' un qualunque poligono regolare iscritto al cerchio; trovare i vertici d' un simile poligono regolare circoscritto.

Fig. 62.

Soluzione. Sieno i punti B, C, D, E vertici del poligono iscritto al cerchio. Con uno di essi C preso per centro, e colla distanza di due d' essi CB presa per raggio si descriva la semicirconferenza BDP (§. 64.). Coi centri B, e C, e col raggio BD si segnino due archi, che si taglino in V (Nel caso del pentagono Fig. 61. il punto V coincide col punto E). Con questo stesso raggio BD, e col centro V si tagli la circonferenza BDP in *p*. Col raggio P*p*, e coi centri B, C, D, E ec.

vertici dell' inscritto si descrivano degli archi, che si taglino nei punti *b*, *c*, *d*, *e*, ec. Questi saranno i vertici del poligono regolare circoscritto.

Dimostrazione. Pel §. 22. si ha $pP \cdot VC = (CD)^2$, cioè $cC \cdot BD = (BC)^2$. Quindi (17. lib. 6.) $BD : BC :: BC : Cc$. Ma $BC = CD$; e $Bc = cC$. Dunque nei due triangoli isosceli BCD, BcC tutti i lati saranno proporzionali. Dunque (5. lib. 6.) sarà l' angolo $cCB = CBD$. Quindi le due cC, BD saranno parallele (28. lib. 1.). Nella stessa guisa si proverà, che alla stessa BD è parallela anche la Cd. Saranno dunque i punti c, C, d nella stessa retta. Ma per essere $BC = CD$, il raggio AC è perpendicolare alla BD (§. 14.). Dunque anche alla cd (29. lib. 1.). Dunque la cd è tangente (16. lib. 3.) alla sua metà in C. Lo stesso si dimostra della $de = cd$ nella sua metà in D, e così dell' altre. Saranno poi queste tante di numero, quanti sono i punti B, C, D, E, ec. Dunque ec. (Defin. 2. lib. 4.).

PROBLEMA.

135. Sopra un dato lato AE costruire un triangolo equilatero.

Fig. 1.

Soluzione. Si trovi il punto D come nel §. 1. Sarà ADE il triangolo cercato.

PROBLEMA.

136. Sopra un dato lato AB costruire un quadrato.

Soluzione. Si trovino come al §. 100. i due punti F, T. Sarà ABTF il quadrato cercato.

Fig. 43.

Dimostrazione. Essendosi ivi dimostrato essere la BT eguale, e parallela ad FA, e perciò perpendicolare ad AB; anche la FT sarà parallela alla BA (33. lib. 1.). Quindi anche gli angoli BTF, AFT saranno retti (27. lib. 1.), e ABTF un quadrato (Def. 32. lib. 1.).

PROBLEMA.

137. Sopra un dato lato A B costruire un pentagono regolare.
Fig. 63.

Soluzione I. Col raggio A B centro A si descriva la circonferenza B C D E d, e si faccia ad A B = B C = C D = D E = E d. Si faccia a B D = B a = E a. Si faccia poi ad A a = D b = d b. Col centro B raggio B A si descriva l'arco indefinito A C L. In esso si faccia ad A b = A H = H K = K L. Si faccia similmente nella circonferenza B C D ad A b = B Q = Q P = P N. Coi centri L, ed N, e col raggio A B si segnino due archi, che si taglino in M. Saranno i punti A, B, L, M, N vertici del pentagono regolare cercato.

Dimostrazione. L'angolo C B F (Fig. 61.) del pentagono regolare B C D E F è misurato dalla metà dell'arco C D E F (20. lib. 3.). Essendo dunque quest'arco eguale a tre quinti della circonferenza; l'angolo C B F del pentagono è misurato da tre decimi. Ora gli archi A H K L, B Q P N, che misurano gli angoli A B L, B A N, sono ciascuno tre decimi della circonferenza (§. 41.). Sono dunque gli angoli ABL, BAN gli angoli del pentagono regolare da costruirsi sopra AB. Sono poi anche i tre lati AB, BL, AN eguali tra loro, cioè lati di esso pentagono. Confrontando dunque i punti L, B, A, N di questa Figura 63. coi punti C, B, F, E della Fig. 61., il triangolo LMN di questa Figura avendo il lati eguali rispettivamente ai lati del triangolo CDE (Fig. 61.), avrà anche gli angoli eguali (8. lib. 1.), e tutto coinciderà. Dunque ec.

Soluzione II. Descritta, come sopra, col raggio AB, centro A la circonferenza BDd, e in essa fatto ad AB = BC = CD = DE = Ed; e fatto a BD = Ba = Ea; e fatto ad Aa = Db = db; col raggio bE, e col centro A si segni un arco, che passi per L, ed M. Collo stesso raggio bE, e col centro B si tagli quest' arco in M, e la circonferenza in N. Finalmente collo stesso raggio, e col centro N si tagli l'arco LM in L. Saranno i punti A, B, L, M, N vertici del pentagono regolare.

Fig. 64.

Dimostrazione. Si ha $(BE)^2 = (bE)^2 + (Bb)^2 + 2Bb \cdot bE$ (4. lib. 2.). Essendo poi l'angolo BNE nel semicerchio, si ha (31. lib. 3., 47. lib. 1.) $(BE)^2 = (BN)^2 + (NE)^2$. Confrontando i due valori di $(BE)^2$, nei quali $(bE)^2 = (BN)^2$ risulta $(Bb)^2 + 2Bb \cdot bE = (NE)^2$. Essendo poi $bE = bA + AE = Ab + AB$, si avrà $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + 2Bb \cdot AB = (NE)^2$. Ma $2Bb \cdot AB = 2(Ab)^2$ (§. 46.). Dunque $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$. Ma $(Bb)^2 + 2Bb \cdot Ab + (Ab)^2 = (AB)^2$. Dunque $(AB)^2 + (Ab)^2 = (NE)^2$. Sarà dunque NE il lato del pentagono iscritto nel cerchio BDd (§. 50.) (10. lib. 13.); quindi essendo l'arco NE eguale a due decime della circonferenza, sarà l'arco BCN eguale a tre decime, e l'angolo BAN sarà l'angolo del pentagono regolare. Essendo poi la BN sottesa ai due lati BA, AN del pentagono regolare; sarà essa il lato del triangolo isoscele, che ha per base AB, e ciascuno degli angoli alla base duplo dell'angolo al vertice (11. lib. 4.). Saranno dunque anche i punti L, ed M vertici del pentagono regolare.

PROBLEMA.

138. Sopra un dato lato AB costruire un
Fig. 65. esagono regolare.

Soluzione. Col raggio AB, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio, e col centro O si descriva un cerchio, e nella sua circonferenza si faccia ad AB = BC = CD = DE = EF. Sarà ABCDEF l'esagono regolare cercato.

Per la Dimostrazione vedi la 15. lib. 4.

PROBLEMA.

139. Sopra un dato lato AB costruire un
Fig. 66. ottangolo regolare.

Soluzione I. Col raggio AB, e coi centri A, e B si descrivano le due semicirconferenze BCDE, AC*de* (§. 64.). Si faccia a CE = E*a* = B*a* = A*a* = *ea*. Col raggio AB centro *a* si tagli l'arco DE in H. Collo stesso raggio, e centro *a* si tagli l'arco *de* in *h*. Collo stesso raggio, e coi centri H, ed *h* si seguino due archi, che passino per G, e *g*. Col raggio B*a*, e coi centri *a*, ed *α* si taglino questi archi in *g*, e G. Col raggio A B, e coi centri G, e *g* si seguino due archi, che passino per F, ed *f*. Col raggio A*a*, e coi centri *a*, ed *α* si taglino questi archi in *f*, ed F. Saranno i punti A, B, *h*, *g*, *f*, F, G, H i vertici dell'ottagono regolare costruito sul lato AB.

Dimostrazione. I lati AB, B*h*, *hg*, *gf*, AH, HG, GF sono tutti eguali per costruzione. Ora se si consideri un ottagono regolare inscritto nel cerchio, si troverà, che ognuno de' suoi angoli alla circonferenza ha per base un arco eguale a sei ottavi di essa, e perciò è misurato da tre ottavi (20. lib. 3.). Si ha poi l'arco BCH eguale a tre ottavi (§. 30.). Dunque l'angolo BAH è dell' ottagono. Istessamente lo è l'angolo AB*h*. Essendo poi le *a*A, *α*B perpendicolari alla AB (§. 27.), saranno parallele tra loro (29. lib. 1.). Dunque la H*a*, che fa un angolo semiretto colla *a*A (§. 27.), lo farà ancora colla *α*B (27. lib. 1.); ma è semiretto anche *h*B*α*; dunque *a*H è parallela ad *h*B (28. lib. 1.). Dunque anche *ah* è eguale, e parallela alla HB (33. lib. 1.). Quindi l'angolo $haH = hBH$ (34. lib. 1.). Ora l'angolo $hBH = hBE - HBE = hBE - \frac{1}{2}HAE$ (20. lib. 3.). Avrà dunque per misura $\frac{3}{8} - \frac{1}{16}$ della circonferenza, cioè $\frac{5}{16}$ di essa: dunque l'angolo Bha, che insieme coll' angolo haH equivale a due retti (27. lib. 1.), avrà per misura $\frac{3}{16}$ della circonferenza. Essendo poi nei due triangoli ahB, ahg tutti i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $ahg = ahB$ (8. lib. 1.). Quindi l'angolo totale ghB avrà per misura $\frac{3}{8}$ della circonferenza, e sarà angolo dell'ottagono. Istessamente lo sarà l'angolo AHG. Sarà ancora l'angolo $hga = hBa$. Ed avendo parimente gli angoli eguali tra loro i due triangoli gfa, BAa; sarà l'angolo $fga = ABa$ (8. lib. 1.). Quindi l'angolo hgf sarà composto di due angoli eguali rispettivamente a due, che compongono l'angolo hBA. Gli sarà dunque eguale, e quindi sarà angolo dell'ottagono. Istessamente lo sarà l'angolo HGF. Saranno dunque anche i punti f, ed F vertici dell' ottagono come tutti gli altri.

Soluzione II. Col raggio AB, e coi centri A, e B descritte come sopra le due semicirconferenze BCDE, $ACde$, e fatto a $CE = Ea = Ba = Aa = ea$;

di nuovo col raggio AB, e col centro a si segni un arco, che tagli l'arco DE in H, e passi per F. Collo stesso raggio, centro α si segni un arco, che tagli l'arco de in h, e passi per f. Col raggio aA, centro a si segni un arco, che passi per f. Collo stesso raggio, centro α si segni un arco, che passi per F. Col raggio AB, e coi centri H, ed F; h, ed f si segnino degli archi, che si taglino in G, e g.

Dimostrazione. Essendo per la dimostrazione della Soluzione I. le AB, $a\alpha$ parallele, ed eguali tra loro, come le due aA, αB, che fanno con quelle angoli retti; posto per brevità AB $=1$; sarà anche $a\alpha = \alpha f = a$F $=1$. Si ha poi $(Aa)^2 = 2 = (af)^2 = (\alpha F)^2$. Quindi saranno retti gli angoli $f\alpha a$, F$a\alpha$ (48. lib. 1.), e i punti f, α, B nella stessa retta (14. lib. 1.), e in una stessa parallela i punti F, a, A. Essendo poi anche eguali $f\alpha$, Fa, sarà fF parallela, ed eguale alla $\alpha a = 1$, ed F$a\alpha f$ un quadrato. Avendo poi i due triangoli FGa, HGa i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8. lib. 1.), e sarà l'angolo FGa $=$ GaH; quindi saranno parallele le due GH, Fa, e quindi anche le due FG, aH

(33.

(33. lib. 1.). Ma l'angolo FaH esterno al triangolo aHA è eguale ai due opposti interni aHA, aAH (32. lib. 1.), cioè a tre semiretti; è dunque l'angolo FaH = BAH; dunque essendo eguali gli angoli opposti nei parallelogrammi (34. lib. 1.), anche FGH = BAH. Si ha poi l'angolo AaH = aHG, ed AHa è retto; dunque anche l'angolo AHG vale tre semiretti. Parimente l'angolo fFa essendo retto, ed aFG = aHG semiretto, sarà anche l'angolo fFG eguale a tre semiretti. Lo stesso si dimostra degli angoli in f, g, ed h. Essendo dunque tutti i lati, e tutti gli angoli eguali, la Figura sarà un ottagono regolare.

Se si quadruplicano i due membri dell'equazione (§. 15.) $(QM)^2 = (AQ)^2 - (AM)^2$, che appartiene alla Fig. 3., si avrà $4(QM)^2 = 4(AQ)^2 - 4(AM)^2$, cioè $(Qq)^2 = 4(AQ)^2 - (AB)^2$; onde ne viene per ogni rombo il teorema: *il quadrato d'una diagonale del rombo equivale a quattro quadrati d'uno de' suoi lati, sottrattone il quadrato dell'altra diagonale.* Quindi nel rombo FaHG si avrà $(aG)^2 = 4(Fa)^2 - (FH)^2$. Ma essendo l'angolo FGH = HAB, e i lati, che comprendono questi due angoli eguali; risulta anche FH = BH (4. lib. 1.). Si avrà dunque $(aG)^2 = 4(AB)^2 - (BH)^2 = (BE)^2 - (BH)^2$. Ma $(BE)^2 = (BH)^2 + (HE)^2$

(31. lib. 3., 47. lib. 1.). Dunque $(aG)^2 = (HE)^2$, e quindi $aG = HE$.

Soluzione III. Col raggio AB, e col
Fig. 67. centro A descritta la semicirconferenza BCDE (§. 64.), e fatto a BD = $Ba = Ea$; col raggio AB centro a si segni un arco, che tagli l'arco DE in H, e passi per F. Col raggio aA centro a si segni un arco, che passi per f. Col raggio aB centro a si segni un arco, che passi per g. Col raggio BH centro a si segni un arco, che passi per h. Col raggio HE centro a si segni un arco, che passi per G. Si faccia ad $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$. Sarà anche $FG = GH$, ec.

Dimostrazione. I triangoli aAB, aBh, ahg, agf, ec., che hanno il vertice in a, e le basi sui lati della Figura, hanno tutti i loro lati eguali rispettivamente ai lati dei triangoli delle stesse lettere nella Figura 66. (Vedi le due Dimostrazioni antecedenti). Dunque avranno anche gli angoli eguali (8. lib. 1.). Ed essendo similmente posti per ordine; anche gli angoli della Figura, che sono composti degli angoli di questi triangoli presi a due a due, saranno eguali agli angoli dell' altra Figura. Dunque ec.

Soluzione IV. Col raggio AB, e col centro A descritta la semicirconferenza BCDE col fare in essa ad $AB = BC = CD = DE$, e fatto a $BD = Ba = Ea$, e col raggio AB, centro a avendo tagliata la semicirconferenza in H, col raggio EH, e coi centri E, ed A si segnino due archi, che si taglino in P. Collo stesso raggio PA, centro P si tagli la semicirconferenza in Q. Col raggio BQ, e coi centri B, ed H si segnino due archi, che si taglino in O. Ora col centro O, e collo stesso raggio OH si descriva un cerchio, che passerà per A. Nella sua circonferenza si faccia ad $AB = Bh = hg = gf = fF = FG$. Saranno i punti A, B, h, g, f, ec. i vertici dell' ottagono.

Dimostrazione. Essendo $QP = AP = EP$, così pure $QA = AE = AB$, e la AB sulla continuazione della AE (15. lib. 6.), si avrà (§. 22.) $BQ \cdot AP = (AQ)^2$. Quindi $AP : AQ :: AQ : BQ$ (17. lib. 6.), ossia $HE : AE :: AB : BO$. Ma HE è un lato dell' ottagono inscritto al cerchio di raggio AE. Dunque anche AB sarà lato dell' ottagono inscritto al cerchio di raggio BO.

PROBLEMA.

139. Sopra un dato lato AB costruire un decagono regolare.

Fig. 69.

Soluzione. Col centro A, e col raggio AB si descriva il cerchio BDd. Si faccia nella sua circonferenza ad AB = BC = CD = DE = Ed. Si faccia a BD = Ba = Ea. Si faccia poi ad Aa = Db = db. Ora col raggio bE, e coi centri A, e B si descrivano due archi, che si taglino in V. Collo stesso raggio bE, e col centro V si descriva il cerchio BLMNOPQRSA, e si faccia ad AB = BL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RS. Il punto S sarà nella sezione delle due circonferenze, e si avranno nei punti A, B, L, M, ec. i dieci vertici del decagono regolare cercato.

Dimostrazione. La bE è un lato del triangolo isoscele, che avendo per base la AB, ha gli angoli alla base ciascuno doppio dell'angolo al vertice (§. 137.). Dunque nel triangolo VAB sarà l'angolo BVA eguale a un quinto di due retti (32. lib. 1.). Sarà dunque l' arco BA, che lo misura, eguale ad un decimo della circonferenza, come lo saranno gli altri archi BL, LM, MN, ec. Sarà dunque il poligono ABLMNOPQRS un decagono regolare inscritto al cerchio di centro V, e costrutto sul lato AB.

PROBLEMA.

140. Sopra un lato dato AB costruire un Fig. 69. poligono regolare qualunque tra quelli, che si possono inscrivere al cerchio (§. 128.).

Soluzione. Col raggio AB si descriva un cerchio BD*d*. In esso si iscriva un poligono regolare simile a quello, che si vuole costruire sul lato AB, cioè di un egual numero di lati (§. 128.); e sia B*l* un lato di questo poligono inscritto. A questo lato B*l*, e al raggio AB si trovi la terza proporzionale (§. 87., 89., 90., 91., 92.). Con essa presa per raggio, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in V. Collo stesso raggio VA, centro V si descriva un cerchio ABLMN, ec., e si faccia ad AB=BL=LM=MN, ec.

I punti A, B, L, M, N, ec. saranno i vertici del poligono cercato.

Dimostrazione. Avendo il triangolo BA*l* i lati proporzionali ai lati del triangolo BVA, sarà l'angolo BA*l* = BVA (5. lib. 6.). Dunque gli archi B*l*, BA, che li misurano, saranno porzioni eguali delle loro circonferenze. Dunque ec.

PROBLEMA.

141. Costruire un quadrato intorno ad una data diagonale AB.
Fig. 70.

Soluzione. Col raggio AB centro A si descriva l'arco BCDE. Collo stesso raggio, e col centro B si descriva l'arco indefinito CP, e si faccia a BC = CD = DE. Si faccia poi a BD = B*a* = E*a*. Ora col raggio A*a*, e col centro E si tagli l'arco CP in P. Col raggio AP, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in L, ed M. Sarà ALBM il quadrato cercato.

Dimostrazione. Se si supponga per brevità $AB = 1$, sarà $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 104.) $= AL = BL$. Quindi $(AL)^2 = (BL)^2 = \frac{1}{2}$, ed $(AL)^2 + (BL)^2 = 1 = (AB)^2$. Dunque l'angolo BLA è retto (48. lib. 1.), e semiretti i due angoli eguali tra loro LBA, LAB (5., e 32. lib. 1.). Istessamente si dimostrerà essere retto l'angolo BMA, e semiretti gli angoli MBA, MAB. Dunque saranno retti gli angoli MBL, MAL, ed ALBM sarà il quadrato cercato.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO DECIMO

DEI CENTRI.

142. TRovare il centro d' un cerchio dato M A B.

Fig. 71.

Soluzione. Fatto centro in qualche punto A della sua circonferenza, con un raggio arbitrario A B, che riesca minore del diametro del cerchio dato, e maggiore del suo quarto, si descriva la semicirconferenza B C D E facendo ad A B = B C = C D = D E. Sia M il punto, dove questa taglia la circonferenza del cerchio dato. Col raggio E M, e coi centri E, ed A si segnino due archi, che si taglino in L. Collo stesso raggio L A, e col centro L si tagli il cerchio B M E in Q. Col raggio B Q, e coi centri B, ed A si segnino due archi, che si taglino in O. Sarà O il centro cercato.

Dimostrazione. Essendo la BAE una retta (15. lib. 4.), l'angolo esterno LAB è eguale ai due interni opposti ALE, AEL presi insieme nel triangolo ALE (32. lib. 1.). Ora i triangoli LAE, LAQ hanno tutti i lati eguali fra loro; quindi hanno eguali gli angoli opposti ai lati eguali (8. lib. 1.). E' dunque l'angolo AEL = QAL, ed ALE = ALQ. Dunque l'angolo LAB è eguale ai due presi insieme QAL, e QLA. E tolto via da tutte due le parti l'angolo QAL, resta l'angolo QAB = QLA. Sarà dunque nel triangolo LAQ la somma degli altri due angoli LAQ, LQA eguale alla somma dei due angoli AQB, ABQ nel triangolo ABQ (32. lib. 1.). Ma questi due triangoli LAQ, ABQ sono isosceli per costruzione; dunque gli angoli alla loro base saranno eguali alla semisomma (5. lib. 1.), e però eguali nell'uno, e nell'altro triangolo tra loro. Saranno dunque i triangoli LAQ, ABQ simili (4. lib. 6.), e sarà LA ad AQ, come AQ a QB. E sostituendo valori eguali, sarà ME ad EA, come AB ad OB. Dunque i triangoli isosceli MAE, AOB avendo i lati proporzionali sono equiangoli tra loro (5. lib. 6.), ed è l'angolo OAB = AME = AEM. Ma l'angolo MAB esterno è eguale ai due interni eguali tra loro presi insieme AME, AEM nel triangolo

AEM (32. lib. 1.). Dunque sarà eguale all'angolo OAB preso due volte; ossia sarà OAB = OAM. Ma sono ancora nei due triangoli OAB, OAM eguali tra loro i lati AB, AM, ed il lato OA è comune; cioè i due triangoli hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque (4. lib. 1.) sarà anche il terzo lato OB d'un triangolo eguale al terzo lato OM dell'altro. Dunque le tre OB, OA, OM sono eguali, e però O è il centro, che si cercava del circolo MAB (9. lib. 3.).

143. Qualora s'è trovato il valore della QB terza proporzionale alle due LA, AQ, ossia alle due EM, EA, che è il valore del raggio del cerchio, di cui si cerca il centro, basterà prendere due punti ad arbitrio nella circonferenza del cerchio, e fatto centro in essi, con questo raggio segnare due archi, che si taglino. La loro sezione sarà il centro del cerchio.

144. Sarà utile in pratica, per ottenere sezioni ad angoli meno acuti, scegliere ad occhio un raggio AB, che s'accosti al valore del raggio del cerchio, che si cerca.

PROBLEMA.

145. Ad un triangolo equilatero dato circoscrivere, ed inscrivere un cerchio.
Fig. 72.

Soluzione. Siano i vertici del triangolo dato A, B, ed M. Col raggio A M, e col centro A si segni l'arco MDE, e si faccia ad AM = M D = D E. Col raggio BD, e coi centri B, ed A si segnino due archi, che si taglino in L. Collo stesso raggio L A, e col centro L si tagli l'arco DE in Q. Col raggio Q E, e con due vertici del triangolo, per esempio A, e B, presi per centri si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio O A, e col centro O si descriva un cerchio. Esso sarà circoscritto al triangolo.

Si divida per metà la QE in *m* (§. 66.). Col raggio Q*m*, e collo stesso centro O si descriva un altro cerchio. Esso sarà inscritto al triangolo.

Dimostrazione. Dalla Dimostrazione del §. 142. risulta essere anche quì la QE terza proporzionale alle due EM, EA, essendo anche qui la BAE una retta. Sarà dunque la QE raggio d'un cerchio, che passa pei tre punti MAB; e sarà O il centro (§. 143.).

Nella Figura 59., nella quale il cerchio DB*d* è inscritto al triangolo NLM, avendosi la AD perpendicolare ad LD, e la NAB ad LB (§. 131.), i triangoli rettangoli NDA, NBL, che hanno un angolo comune in N, hanno anche il terzo angolo eguale (32. lib. 1.); quindi si ha la proporzione (4. lib. 6.) NL : LB :: NA : DA. Ma NL è doppia di LB; dunque anche NA è doppia di DA, cioè il raggio del cerchio circoscritto al triangolo equilatero è doppio del raggio del cerchio inscritto. Dunque ec.

PROBLEMA.

146. Ad un quadrato dato circoscrivere, ed inscrivere un cerchio.

Fig. 73.

Soluzione. Sieno i quattro vertici dati del quadrato A, B, T, F. Si faccia ad AB = AE. Ad FB = FE. Collo stesso raggio BF, e col centro B si segni un arco, che passi per Q, e *q*. Col centro E, e col raggio EA si tagli quest'arco in Q, e *q*. Collo stesso raggio AE, e coi centri Q, e *q* si segnino due archi, che si taglino in M. Col raggio AQ, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio OB, e col centro O si descriva un cerchio. Esso sarà circoscritto al quadrato. Collo stesso centro O, e col raggio OM si descriva un altro cerchio. Esso sarà inscritto al quadrato.

Dimostrazione. Se per brevità si suppone AB $= 1$, si avrà AQ $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 104.) $=$ AO $=$ BO. Sarà dunque $(AO)^2 + (BO)^2 = 1 = (AB)^2$. Quindi sarà retto l'angolo BOA (48. lib. 1.), e semiretti gli angoli OAB, OBA (5., e 32. lib. 1.). Essendo poi retto l'angolo BAF del quadrato, sarà semiretto l'angolo OAF. Dunque nei due triangoli BAO, FAO si avrà un angolo eguale compreso fra lati eguali tra loro. Quindi sarà anche OB $=$ OF (4. lib. 1.). Nella stessa maniera si dimostra essere anche OB $=$ OT. Dunque il cerchio ABTF è circoscritto al quadrato.

La OM è perpendicolare alla MA (§. 83.). Dunque la BMA è tangente al cerchio descritto col raggio OM. Lo stesso si dimostra degli altri lati AF, FT, TB. Dunque il cerchio descritto col raggio OM, e col centro O è inscritto al quadrato.

PROBLEMA.

147. Ad un qualunque poligono regolare circoscrivere, e inscrivere un cerchio.
Fig. 74.

Sieno B, A, M tre vertici di questo poligono regolare, dei quali quello di mezzo A sia egualmente lontano dagli altri due B, ed M. Fatto centro in A, col raggio A B si descriva la semicirconferenza B C D E (§. 64.). Col raggio M E, e coi centri A, ed E si segnino due archi, che si taglino in L. Col centro L, e collo stesso raggio L A si tagli la semicirconferenza B C D E in Q. La BQ sarà il raggio del cerchio circoscritto. E però presi per centri due vertici del poligono, per esempio B, ed A, e col raggio BQ segnati due archi, che si taglino in O; sarà O il centro.

Se AB è un lato del poligono, si divida per metà in T (§. 66.). Sarà O T il raggio del cerchio inscritto, che si descriverà col medesimo centro O. Se fosse qualunque altro A*b* uno de' lati del poligono, si divida per metà Ab in t. Sarà Ot il raggio del cerchio da inscriversi col medesimo centro O.

Dimostrazione. Che O sia il centro del cerchio, che passa pei tre punti B, A, M, risulta dalla Dimostrazione del §. 14. Dunque è centro del cerchio circoscritto, poichè pei tre punti B, A, M non si può far passare, che un cerchio (25. lib. 3.).

E' poi OT perpendicolare alla TA (§. 83.). Quindi la TA sarà tangente al cerchio descritto col raggio OT, e col centro O (16. lib. 1.). Lo stesso si dimostra di tutti gli altri lati eguali ad AB. Dunque questo cerchio è inscritto al poligono, che ha per lato AB. Istessamente si dimostra, che il cerchio descritto col raggio Ot, e col centro O è inscritto al poligono, che ha per lato Ab.

148. Se AB è lato del poligono, nel quale si vuole iscrivere il cerchio, ci saranno molte maniere di dividerlo per metà (§. 66.). Pel quadrato abbiamo assegnato la più semplice (§. 146.). Pel triangolo solo (§. 145.) il raggio del cerchio inscritto è la metà del raggio del circoscritto. Nel solo quadrato è eguale alla metà del lato.

PROBLEMA.

149. Trovare il centro S d'un cerchio, Fig. 75. che passi per tre punti dati PQR.

Soluzione. Fatto centro in P, e Q, con un raggio arbitrario si segnino due archi, che si taglino in A, e B. Fatto centro in Q, ed R, si segnino pure con un raggio arbitrario due archi, che si taglino in C, e D. Si trovi il punto S, dove le due AB, CD si tagliano (§. 112.). Sarà S il centro cercato.

Dimostrazione. Vedi la 25. lib. 3.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO UNDECIMO.

PROBLEMI VARJ.

PROBLEMA.

150. DAta una scala S L, trovare l'area del campo triangolare A B D, e del cam-
Fig. 76. po quadrilatero A B C D.

Soluzione. Si faccia a BA = B*a*; a D A = D*a* (§. 11.). Si portino sulla scala S L le distanze A *a*, e B D prese sul compasso, e si trovi essere per esempio A*a* = 7, BD = 8. Si moltiplichino tra loro questi due numeri, e si pigli il quarto del prodotto = 14. Questo numero esprimerà l'area del triangolo ABD. Se si voglia l'area del campo quadrilatero ABCD, trovato, come quì sopra, il punto *a*, si faccia a BC = B*c*, a DC = D*c*. Si trovino sulla scala le due distanze Aa, Cc, e sia per esempio $Aa = 7$, $Cc = 5$. Per la loro somma $= 12$ si moltiplichi la BD trovata sulla scala per esempio $= 8$. Del prodotto 96 si pigli la quarta parte 24. Questo numero esprimerà l'area del quadrilatero $ABCD$.

Dimostrazione. La Aa è doppia della perpendicolare, che da A cade sopra la BD (§. 14.). Ma l'area del triangolo ABD è eguale alla metà dell'area d'un parallelogrammo, che ha per base la BD, e per altezza questa perpendicolare (41. lib. 1.). Dunque è eguale alla quarta parte del prodotto della Aa nella BD. Egualmente l'area del triangolo BCD è eguale alla quarta parte del prodotto della Cc nella BD. Dunque l'area del quadrilatero $ABCD$ è eguale alla quarta parte del prodotto della somma delle due parallele Aa, Cc nella loro perpendicolare BD.

151. Può servire questo Problema a misurare l'area di tutto un Disegno di un campo poligono, ripartendolo in tanti quadrilateri, e triangoli coll'immaginarvi delle linee rette. Si potrebbero proporre anche altre maniere di ridurlo in trapezj, ma queste si possono, quando giovi, raccogliere facilmente dal metodo, col quale si è sciolto questo Problema.

PROBLEMA.

152. Dati i piani triangolari, che contengono una piramide tetraedra; trovare
Fig. 77. nella sua base il punto, nel quale cade la perpendicolare dal vertice; e trovare la sua altezza.

Soluzione. Sia il triangolo ABC la base di questa piramide tetraedra, e sieno AEC, BDC, AFB i piani triangolari, che vanno al suo vertice.

Col centro C, e col raggio CD = CE si descriva un arco, che passi per *e*, e *d*.

Col centro B, e col raggio BD si descriva un arco, che tagli il primo in *d*. Col centro A, e col raggio AE si segni un arco, che tagli il primo in *e*.

Si trovi il punto P, dove si tagliano le due rette D*d*, E*e* (§. 112.). Sarà questo il punto, dove cade la perpendicolare dal vertice della piramide.

Si divida per metà la CE in *m* (§. 66.). Col raggio *m*C, centro *m* si descriva la semicirconferenza C*p*E. Si faccia a CP = C*p*. Sarà E*p* l'altezza della piramide.

Dimostrazione. Se nella piramide SABC, che
Fig. hà per base il triangolo ABC, e per vertice
78. S, si guidi nel triangolo SCB la retta Sδ perpendicolare a CB, e nel piano della base ACB dal punto δ si alzi la perpendicolare δd; sarà in essa il punto P, in cui cade la perpendicolare SP dal vertice (11. lib. 11.). Istessamente se dal punto S nel piano SAC si guidi ad AC la perpendicolare Sϵ, e da ϵ nel piano della base ACB si guidi la perpendicolare ϵe alla stessa AC; sarà in essa il punto P. Sarà dunque questo la sezione delle due rette δd, ϵe. Ma nella Figura 77., nella quale i punti D, ed E rappresentano il punto S della Figura 78., la Dd è perpendicolare alla BC in un punto δ (§. 14.); così pure la Ee è perpendicolare alla AC in un punto ϵ. Dunque il punto P è il cercato.

Essendo poi i due triangoli CPS Fig. 78., CpE Fig. 77. rettangoli in P, e p, il primo per supposizione, e il secondo per la 31. lib. 3., ed essendo CS la stessa CE, e la CP $=$ Cp; sarà ancora PS $= p$E. Poichè (Fig. 78.) $(CS)^2 - (CP)^2 = (PS)^2$ (47. lib. 1.). Egualmente (Fig. 77.) $(CE)^2 - (Cp)^2 = (pE)^2$. Ma $(CS)^2 - (CP)^2 = (CE)^2 - (Cp)^2$. Dunque $(PS)^2 = (pE)^2$. Quindi PS $= p$E. E' dunque pE l'altezza della piramide.

153. Fin quì nelle Dimostrazioni non si siamo

dipartirsi dagli Elementi di Euclide. Ma poichè in seguito ciò non si potrebbe più fare ogni volta senza troppa prolissità; porremo quì in sussidio alcune equazioni, che si trovano dimostrate in tutti i trattati di Trigonometria Piana.

154. Se in un cerchio descritto col raggio $= 1$ sieno x, ed y due archi qualunque; si avrà

$$\text{sen.}\,(x+y) = \text{sen.}\,x\,.\,\text{cos.}\,y + \text{cos.}\,x\,.\,\text{sen.}\,y$$
$$\text{sen.}\,(x-y) = \text{sen.}\,x\,.\,\text{cos.}\,y - \text{cos.}\,x\,.\,\text{sen.}\,y$$
$$\text{cos.}\,(x+y) = \text{cos.}\,x\,.\,\text{cos.}\,y - \text{sen.}\,x\,.\,\text{sen.}\,y$$
$$\text{cos.}\,(x-y) = \text{cos.}\,x\,.\,\text{cos.}\,y + \text{sen.}\,x\,.\,\text{sen.}\,y$$

155. Se nella terza di queste equazioni si ponga $x = y$; si avrà

$$\text{cos.}\,2x = (\text{cos.}\,x)^2 - (\text{sen.}\,x)^2.$$

E poichè $(\text{cos.}\,x)^2 + (\text{sen.}\,x)^2 = 1$, e quindi $(\text{cos.}\,x)^2 = 1 - (\text{sen.}\,x)^2$; ne verrà $\text{cos.}\,2x = 1 - 2(\text{sen.}\,x)^2$, e quindi $(\text{sen.}\,x)^2 = \dfrac{1 - \text{cos.}\,2x}{2}$; e finalmente

$$\text{sen.}\,x = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.}\,2x}{2}}.$$

156. Se si sommano la prima, e la seconda delle equazioni del §. 154., ne verrà

$$\text{sen.}\,(x+y) + \text{sen.}\,(x-y) = 2\,\text{sen.}\,x\,.\,\text{cos.}\,y,$$

e quindi

$$\text{sen.}\,x\,.\,\text{cos.}\,y = \frac{\text{sen.}\,(x+y) + \text{sen.}\,(x-y)}{2}.$$

Se si faccia $x + y = p$, $x - y = q$; si avrà

$2x = p + q$; $2y = p - q$; quindi

$$\text{sen.}\, p + \text{sen.}\, q = 2\, \text{sen.}\, \frac{p+q}{2} \cdot \text{cos.}\, \frac{p-q}{2}.$$

157. Se si sommano la terza, e la quarta delle equazioni del §. 154., ne verrà

$$\text{cos.}\, x \cdot \text{cos.}\, y = \frac{\text{cos.}\,(x+y) + \text{cos.}\,(x-y)}{2},$$

e quindi $\text{cos.}\, p + \text{cos.}\, q = 2\, \text{cos.}\, \frac{p+q}{2}\, \text{cos.}\, \frac{p-q}{2}$.

158. Se si sottrae la terza dalla quarta delle predette equazioni, ne verrà

$$\text{sen.}\, x \cdot \text{sen.}\, y = \frac{\text{cos.}\,(x-y) - \text{cos.}\,(x+y)}{2},$$

e quindi $\text{cos.}\, q - \text{cos.}\, p = 2\, \text{sen.}\, \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen.}\, \frac{p-q}{2}$.

159. Essendo $2\, \text{sen.}\, x = \text{corda} \cdot 2x$; sarà (§. 155.) $\text{corda} \cdot 2x = 2\sqrt{\frac{1 - \text{cos.}\, 2x}{2}}$; e posto x in luogo di $2x$, si avrà

$$\text{corda} \cdot x = 2\sqrt{\frac{1 - \text{cos.}\, x}{2}} = \sqrt{(2 - 2\, \text{cos.}\, x)}.$$

Se si chiami k la corda, c il coseno, s il seno, h la corda del complemento al quadrante; si avrà $k^2 = 2 - 2c$

$$h^2 = 2 - 2s.$$

Dalla prima di queste due equazioni si avrà $c = 1 - \frac{1}{2}k^2$, ed essendo $s = \sqrt{(1 - c^2)}$ $= \sqrt{(k^2 - \frac{1}{4}k^4)} = k\sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$; si avrà $h^2 = 2 - 2k\sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$.

PROBLEMA.

160. In un dato triangolo equilatero ABC
Fig. inscrivere un quadrato $ebcd$ (§. 124.).
79.

Soluzione I. Se vorremo servirsi dei lati dati del triangolo, col centro A, e col raggio AB si descriva il semicerchio BCDE (§. 64.).

Col centro E, e col raggio EC si descriva un arco, che tagli il dato lato AB in b. Col centro A, e col raggio Bb si descriva un arco, che tagli lo stesso lato in e. Coi centri e, e b, e col raggio eb si descrivano due archi, che taglino i lati AC in d, e CB in c. Sarà $ebcd$ il quadrato iscritto.

Dimostrazione. Posto per brevità $AB = 1$, sarà $Eb = EC = BD = \sqrt{3}$ (§. 2.); quindi $Bb = BE - Eb = 2 - \sqrt{3} = Ae$; quindi $be = AB - 2Ae = 2\sqrt{3} - 3 = (2 - \sqrt{3})\sqrt{3} = bc$. Sarà dunque $Bb : bc :: (2 - \sqrt{3}) : (2 - \sqrt{3})\sqrt{3} :: 1 : \sqrt{3}$.

Ma se si suppone che la AB sia tagliata per metà in T dalla perpendicolare CT; sarà pure $BT : TC :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104.); cioè $BT : TC :: 1 : \sqrt{3}$. Dunque la bc

è parallela alla TC (2. lib. 6.), e quindi perpendicolare alla AB (27. lib. 1.). Lo stesso si dimostrerà della *de*. Dunque *ebcd* è il quadrato inscritto.

Soluzione II. Se poi non si volessimo servire della intersezione dei lati dati del triangolo ABC; ma solamente dati i tre punti estremi A, B, e C del triangolo si dovessero trovare i quattro punti *b*, *c*, *d*, *e* del quadrato da inscriversi;

Col centro E, come prima, e col raggio EC si segni un arco, che passi per *b*, C, ed *a*. Collo stesso raggio, e col centro B si segni un arco, che tagli l'antecedente in *a*.

Col raggio AB, e col centro *a* si tagli la semicirconferenza BCDE in H. Si faccia in essa ad H*a* = HI = IK.

Col raggio *a*K, e col centro D si descriva un arco, che passi per *b*. Sarà determinato il punto *b*.

Col raggio B*b*, e col centro A si guidi un arco per *e*. Col raggio C*b*, e col centro C si guidi un altro arco, che tagli l'ultimo in *e*. Col raggio *be*, e coi centri *e*, e C si segnino due archi, che ſi taglino in *d*. Collo ſteſſo raggio *ba*, e coi centri *b*, e C ſi ſegnino due archi, che ſi taglino in *c*. Sarà *bcde* il quadrato cercato.

Ovvero compito il cerchio BCDEδ, e fatto ad AB = Eδ; col raggio *a*K determinato come quì ſopra, e coi centri D, e δ ſi deſcrivano due archi, che ſi taglino in *b*. Il reſto ſi faccia come ſopra.

Dimoſtrazione. Il punto K ſi sarà quì determinato come nella Figura 9. (§. 32.) per via del medeſimo punto *a*, ſicchè l'arco BK sarà una ventiquattreſima parte della circonferenza. Ora nella Figura 9. eſſendo BK = B*k* = EM; se ſi confrontino i punti *a*, K, B, *k*, A, M coi punti Q, A, R, S, *p*, B della Figura 4.; dall'equazione $(AQ)^2 = (RQ)^2 - AS \cdot pQ$ (§. 20.) riſulterà per la Figura 9. l'equazione $(aK)^2 = (Ba)^2 - Kk \cdot Aa$. Ora K*k* è corda d'una dodiceſima parte della circonferenza. Per trovare il suo valore, supponendo per brevità AB = 1, ſi ha il seno di BN = K*k* = AX (Fig. 12.) $= \frac{1}{2}$, e il doppio del suo coseno, cioè 2NX = NO = BD = $\sqrt{3}$; quindi se nell'equazione (§. 159.) $\text{corda} \cdot x = \sqrt{(2 - 2\cos. x)}$ in luogo di *x* ſi ſoſtituiſce l'arco K*k*, e in luogo di $2\cos. x$, $\sqrt{3}$, ſi avrà la retta

$Kk = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Quindi $(aK)^2 = 3 - (\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}})\sqrt{2}$ (§. 27.) $= 3 - (\sqrt{3} - 1) = 4 - \sqrt{3}$. Ora se coi centri D, e δ, e col raggio aK si segnino due archi, che si taglino in b, sarà il punto b sulla retta BE (§. 13.), che dividerà in due egualmente la $D\delta$ al punto R ad angoli retti (§. 14.), facendo $RD = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104.). Essendo dunque $(Db)^2 = (DR)^2 + (bR)^2$ (47. lib. 1.); sarà $(bR)^2 = (Db)^2 -$

$$(DR)^2 = 4 - \sqrt{3} - \tfrac{3}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}$$

e quindi $bR = \sqrt{3} - \tfrac{1}{2}$, e $bE = \sqrt{3}$. Dunque per la Dimostrazione della Soluzione I. il punto b è uno degli estremi del quadrato. Sarà poi lo stesso, se si trovi coi centri D, ed E, e coi due raggi aK, e BD, come nella prima parte di questa Soluzione II. Avendo poi eguali i lati tra loro i due triangoli CAe, CBb, sarà l'angolo $CBb = CAe$ (8. lib. 1.) $= CBA$. Quindi il punto e sarà sulla BA, e sarà un altro estremo del quadrato. Finalmente essendo in questa seconda Soluzione le rette Cb, Ce le stesse di posizione, e di grandezza, che nella Soluzione prima, ed essendo anche nella prima Soluzione $Cd = ed$, $Cc = bc$ a cagione del triangolo equilatero Ced pel parallelismo della cd alla BA (2. lib. 6.); saranno anche i punti d, e c determinati in questa seconda Soluzione come nella prima.

PROBLEMA.

161. Nel quadrato ABLF inscrivere un triangolo equilatero, che ha un angolo B ad un angolo del quadrato.
Fig. 80.

Soluzione I. Col centro A, e col raggio AB si descriva la semicirconferenza BFE, facendo ad $FB = FE$; si faccia pure a $BE = BQ = EQ$. Se si vogliamo servire delle sezioni dei lati dati del quadrato; col centro F, e col raggio FQ si descriva un arco, che tagli due lati del quadrato nei punti M, ed N, saranno i punti B, M, N gli estremi del triangolo cercato.

Dimostrazione. Essendo retto l'angolo QAB (§. 83.); sarà $(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2$ (47. lib. 1.), e preso per brevità $AB = 1$; si avrà $4 = 1 + (AQ)^2$; quindi $AQ = \sqrt{3}$; $FQ = AQ - AF = \sqrt{3} - 1 = FM = FN$. Quindi $(FM)^2 = (FN)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$, e però $(MN)^2 = (FM)^2 + (FN)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$. Essendo poi $LM = LF - FM = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$; sarà $(LM)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$. Quindi $(BM)^2 = (BL)^2 + (LM)^2 = 8 - 4\sqrt{3} = (MN)^2$.

Istessamente si dimostra essere $(BN)^2 = (MN)^2$. Dunque $BM = MN = BN$.

Soluzione II. Se non si suppongano dati, che i quattro estremi del quadrato A, B, L, F; trovato come nella Soluzione I. il punto Q, col centro F, e col raggio FQ si descriva la circonferenza QRSNM, e fatto ad $FQ = QR = RS = SN$, col centro B, e col raggio BN si tagli questa circonferenza nel punto M. Saranno i punti B, N, M gli estremi del triangolo cercato.

Dimostrazione. L'arco QRSN è la metà della circonferenza (15. lib. 4.). Dunque il punto N è nella retta QFA, ed è egualmente distante da F, che nella Soluzione I.; dunque è lo stesso. Il punto M anche nella Soluzione I. si trova nella sezione di due archi descritti coi centri F, ed M, e coi raggi eguali ad FQ, ed a BN come in questa; dunque è lo stesso. Dunque ec.

PROBLEMA.

162. In un triangolo equilatero, di cui sono dati i vertici P, Q, R, inscrivere un esagono regolare. Fig. 81.

Soluzione. Si divida la distanza QR in tre parti eguali nei punti *c*, e *d* (§. 68.). Coi centri *c*, e *d*, e col raggio *cd* si segnino due archi, che si taglino in A. Collo stesso raggio, e col centro A si descriva un cerchio, e si faccia nella sua circonferenza a $dc = cB = BC = CD = DE$. Saranno i punti B, C, D, E, *d*, *c* i vertici dell'esagono inscritto.

Dimostrazione. Il triangolo B*c*Q ha i lati B*c*, Q*c* eguali ai lati A*d*, *cd* del triangolo A*dc*, e l'angolo compreso eguale pel parallelismo delle due, B*c*, A*d* (27. lib. 1.). Dunque gli è eguale in tutto (4. lib. 1.), e l'angolo $cQB = dcA = cQP$. Dunque il punto B è sulla PQ. Istessamente si dimostra, che gli altri punti C, D, E sono sui lati del triangolo proposto. Dunque ec.

PROBLEMA.

163. In un dato quadrato ABLF inscrivere un ottagono regolare.

Fig. 82.

Soluzione I. Se si vogliamo servire dell' intersezione dei lati dati del quadrato, col centro A, e col raggio AB si descriva la semicirconferenza BCDE, facendo ad AB = BC = CD = DE. Si faccia a BF = BQ, ad EA = EQ. Col raggio AQ, e col centro A si taglino due lati in *b*, e *g*. Collo stesso raggio, e coi centri B, L, ed F si taglino in seguito i lati nei punti *a*, *d*, *c*, *f*, *e*, *h*. Saranno questi i vertici dell' ottagono *abcdefgh*.

Soluzione II. Trovato come nella Soluzione I. il punto Q; col raggio AQ, e coi centri A, e B si segnino due archi, che si taglino in O. Collo stesso raggio, e col centro A si tagli il lato AB in *b*. Col centro O, e col raggio O*b* si descriva un cerchio, che tagli i lati del quadrato negli altri punti *c*, *d* *e*, *f*, *g*, *h*, *a*. Saranno essi i vertici dell' ottagono.

Soluzione III. Se non fossero dati i lati del quadrato, ma solo i quattro vertici A, B, L, F; trovato come nella Soluzione I. il punto Q, si faccia ad EC = EM, a BF = BM. Col raggio AM, e col centro A si descriva un arco, che passi per e, d. Collo stesso raggio, e col centro B si descriva un arco, che passi per f, g. Collo stesso raggio, e col centro L si descriva un arco, che passi per h, a. Collo stesso raggio, e col centro F si descriva un arco, che passi per b, c. Col raggio AQ, e coi centri A, B, L, F si taglino questi archi nei punti b, g, d, a, c, f, e, h. Questi saranno i vertici dell'ottagono.

Dimostrazione. Supposto per brevità, che sia $AB = 1$; sarà $AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (§. 104.); $AQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Sarà dunque $(Ad)^2 = (AM)^2 = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2} = (AB)^2 + (Bd)^2$ per essere $(Bd)^2 = (AQ)^2 = \frac{1}{2}$. Sarà dunque retto l'angolo ABd (48. lib. 1.), e però il punto d sarà nella BL. Istessamente si dimostrerà, che tutti gli altri punti sono nei lati del quadrato proposto. Si avrà poi $Ld = BL - Bd = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = Le$, e $(de)^2 = (Ld)^2 + (Le)^2$ (47. lib. 1.) $= 2(Ld)^2$, e quindi

$de = Ld \times \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$. Ma si ha $cd = BL - Ld - Bc = BL - 2Ld = 1 - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$.

Dunque $cd = de$. Istessamente si dimostrerà, che sono eguali tra loro tutti i lati dell' ottagono. Essendo poi eguali tra loro in tutto i triangoli Lde, Bbc, Aah, Ffg (4. lib. 1.); saranno eguali i loro angoli ai punti a, b, c, d, e, f, g, h; quindi saranno eguali anche i loro supplementi ai due retti, cioè gli angoli dell' ottagono (13. lib. 1.).

PROBLEMA.

164. Dato un ottagono regolare $ABhgfFGH$, trovare facilmente 1.° il lato d' un ottagono regolare doppio di area. 2.° il lato d' un ottagono triplo.

Fig. 66.

Soluzione. Col lato AB dell' ottagono dato preso per raggio fatto centro in F, ed H si descrivano due archi, che si taglino in a. Sarà 1.° af, ovvero aA il lato dell' ottagono doppio. 2.° aB, ovvero ag il lato dell' ottagono triplo.

Dimo-

Dimostrazione. Se si supponga essere AB $=$ 1, sarà $aA = af = \sqrt{2}$ (§. 139.); $aB = ag = \sqrt{3}$ (§. 2.). Ma le aree delle figure simili sono in ragione duplicata dei lati omologhi (20. lib. 6.). Dunque sarà aA lato d' un ottagono doppio, ed aB d'un triplo.

PROBLEMA.

165. In un cerchio di un raggio dato AB
Fig. inscrivere tre cerchj, che lo tocchino,
83. e si tocchino tra loro.

Soluzione. Nella circonferenza del cerchio dato si faccia ad AB $=$ BC $=$ CD $=$ DE $=$ Ed $=$ dc. Col raggio BD, e col centro B si descriva un arco, che passi per a, p, ed α. Collo stesso raggio BD, e col centro E si tagli quest' arco in a, ed α. Collo stesso raggio, e coi centri C, c si descrivano due archi, che si taglino in V; e coi centri D, e d due altri archi, che si taglino in ν. Collo stesso raggio, e coi centri V, ν si descrivano due archi, che passino per m, ed n. Col raggio AB, e coi centri a, ed α si tagli la circonferenza del cerchio dato in G, H, ed in g, h. Si faccia in essa circonferenza allo stesso raggio $AB = GL = HI = gl = hi$. Si faccia ad $Aa = BF$, ad $IL = LY = IY = ly = iy$. Ad $Yy = Fm = Fn$. A $Dn = Dp$. Col centro A, e col raggio mn si descriva il cerchio PSRXQT, e preso nella sua circonferenza un punto arbitrario P, si faccia a $PA = PS = SR = RX = XQ = QT$. Finalmente coi centri P, Q, R, e col raggio pn si descrivano tre cerchj. Saranno questi i cercati.

Dimostrazione. Essendo la IL corda d'una duodecima parte della circonferenza (§. 32.), sarà $IL = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ (§. 160.). Ed essendo il quadrato del diametro $(Li)^2 = (IL)^2 + (Ii)^2$ (47. lib. 1. 31. lib 3.); si avrà $4 = 2 - \sqrt{3} + (Ii)^2$; quindi $(Ii)^2 = 2 + \sqrt{3}$, ed $Ii = \sqrt{(2 + \sqrt{3})}$. Si avrà poi (§. 20.) $(aI)^2 = (aB)^2 - Ii \cdot Aa = 3 - \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})} = 3 - (1 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$. Quindi $aI = IL = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$. Per per le stesse ragioni sarà $aL = LI$; quindi sarà $aIYL$ un rombo, e si avrà $(aY)^2 = 4(aI)^2 - (IL)^2 = 3(IL)^2$ (§. 139.). Quindi $aY = IL \cdot \sqrt{3}$. Ma essendo i punti I, ed L egualmente lontani da A; saranno i tre punti a, Y, A nella stessa retta (§. 13.). Quindi $AY = Aa - aY = \sqrt{2} - \sqrt{(6 - 3\sqrt{3})} = \sqrt{2} - (3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = IL$. Lo stesso si dimostrerà della Ay. Essendo poi il punto y nella $a\alpha$ cioè nella aA (§. 13.); sarà $Yy = 2AY$. Ora i punti V, B, A, E, ν sono nella stessa retta (§. 13.). Se si supponga per un momento, che nella stessa retta sieno i punti m, n; sarà $Am = AV - Vm = 2 - \sqrt{3}$. Poichè se si confrontino i punti C, c, V, B, A, E coi punti A, B, Q, P, p, q della Fig. 3., si avrà in questa Figura 83. $VB = AE$ (§. 14.), e quindi $AV = 2$. E' poi $Vm = \sqrt{3}$. Istessamente si dimostrerà essere $An = 2 - \sqrt{3}$. Quindi sarà $(Fm)^2 = (Am)^2 + (AF)^2$ (47. lib. 1.) $= 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(2 - \sqrt{3})$. Quindi $Fm = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 2AY$. Si è poi preso nella costruzione della Figura $Fn = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$. Dunque il punto m sarà nella retta VA. Lo stesso si dimostra del punto n. Dunque essendo perciò $Am = 2 - \sqrt{3}$; sarà $mn = 4 - 2\sqrt{3}$. Avendo poi i triangoli BpD, νnD i lati eguali tra loro; sarà l'angolo $D\nu n = DBp$ (8. lib. 1.). Ma l'angolo $D\nu n$, che è lo stesso coll'angolo $D\nu B$ essendo eguale all'angolo DBV (5. lib. 1.), si avrà l'angolo $DBp = DB\nu$.

Dunque il punto p è nella retta AE. Si ha poi $Dn = Dp$, e itessamente si dimostra $dn = dp$. Dunque confrontando i punti D, d, A, n, p, E di questa Figura coi punti A, B, Q, P, p, q della Figura 3., si troverà in questa Figura 83. essere $pE = An = 2 - \sqrt{3}$. Quindi $pn = AE - 2An = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$. Essendo poi il triangolo equilatero PQR simile al triangolo equilatero B Dd, e quindi anche il triangolo ABD simile al triangolo APR (20. lib. 6.); sarà AB : BD :: AP : PR. Cioè $1 : \sqrt{3} :: 4 - 2\sqrt{3} : PR$. Quindi $PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2pn$. Tagliata dunque per metà la PR in p, sarà il punto p egualmente nelle due circonferenze de'cerchj descritti coi centri P, ed R, e sarà p il punto di contatto (12. lib. 3.). Si aggiunga ora alla retta $AR = mn = 4 - 2\sqrt{3}$ il raggio del cerchio descritto col centro R, ossia la retta $Rr = np = 2\sqrt{3} - 3$; si avrà $Ar = 4 - 3 = 1 = AB$. Dunque il punto r sarà egualmente nelle due circonferenze, e il cerchio descritto col centro R toccherà internamente il cerchio dato (11. lib. 3.). Lo stesso si dimostrerà degli altri. Dunque ec.

166. Questo Problema viene sciolto elegantemente da Tommaso Simpson *Select Exercises &c. Geometrical Problems* Probl. 13. col cerchio, e colla riga. Dalla nostra costruzione

apparisce poterfi sciogliere ancora più brevemente colla riga, e col compasso, di quello che fa il Simpson, se condotta la retta Vav, e fatto in essa ad $AB = BV = Ev$, si faccia e $BD = Vm = Bp = vm$, col centro A, e col raggio mn si descriva il cerchio PQR, e si faccia il restante come nella Soluzione antecedente.

PROBLEMA.

167. Col centro A descrivere un cerchio, che tocchi esteriormente i tre cerchj inscritti per il Problema antecedente (§. 166.) ad un cerchio dato.

Fig. 83.

Soluzione. Si cerchi una terza proporzionale alle due AB, Am (§. 86.). Con essa presa per raggio, e col centro A si descriva un cerchio. Sarà esso il cercato.

Dimostrazione. Essendo $AB = 1$; $Am = 2 - \sqrt{3}$, sarà la terza proporzionale $= 7 - 4\sqrt{3}$. Ora se dal raggio $Ar = 1$ si sottragga il diametro qr del cerchio descritto col centro R, cioè se si sottragga $2np = 4\sqrt{3} - 6$; si avrà appunto $7 - 4\sqrt{3}$.

Dunque un cerchio descritto col centro A, e con quella terza proporzionale toccherà questo cerchio inscritto nel punto q (12. lib. 3.), e toccherà ancora gli altri due cerchj.

PROBLEMA.

168. In un cerchio di raggio dato AB
Fig. inscrivere quattro cerchj, che siano tan-
84. genti di esso, e tra loro.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza del dato cerchio ad AB = BC = CD = DE. Quindi a BD = Ba = Ea; quindi ad Aa = BF = Bf; quindi ad AB = FN = FO; quindi a BD = NP = OP. Col centro A, e col raggio aP si descriva il cerchio QRST. Preso un punto arbitrario Q sulla sua circonferenza, si faccia in essa a BQ = FR = ES = fT. Coi centri Q, R, S, T, e col raggio aF si descrivano quattro cerchj. Essi saranno i cercati.

Dimostrazione. Essendo BF = FE = Ef = fB (§. 27.); sarà ancora QR = RS = ST = TQ (§. 93.). Sarà dunque retto l'angolo TAQ. Dunque $(TQ)^2 = (AT)^2 + (AQ)^2 = 2(AT)^2$. Preso poi $AB = 1$; sarà anche $FP = 1$ (§. 165.); quindi $AP = 2$. Sarà pure $Aa = \sqrt{2}$ (§. 27.); quindi $aP = 2 - \sqrt{2}$; $aF = \sqrt{2} - 1$. Quindi $2(AT)^2 = 2(aP)^2 = (TQ)^2 = 2(2 - \sqrt{2})^2$, e $TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) = 2aF$.

Dunque la distanza dei due centri T, e Q è eguale alla somma dei raggi dei due cerchj descritti con questi centri. Quindi essi si toccano alla metà della TQ in p. Lo stesso si proverà di due altri qualunque. Sia poi r il punto, dove la AR continuata taglia il cerchio descritto col centro R; sarà $Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB$. Dunque il punto r sarà nella circonferenza del cerchio dato. Quindi la Ar passando pei due centri A, ed R sarà perpendicolare alla tangente d'entrambi al punto r; quindi essi si toccheranno tra loro (13., e 16. lib. 3.). Lo stesso si dimostra degli altri.

PROBLEMA.

169. Col centro A descrivere un cerchio, che tocchi i quattro ultimamente inscritti (§. 168.) in un cerchio dato.
Fig. 84.

Soluzione. Si trovi una terza proporzionale alle due rette FP, Fa (§. 86.). Con essa presa per raggio, e col centro A si descriva un cerchio. Esso sarà il cercato.

Dimostrazione. Essendo PF $= 1$, F$a = \sqrt{2} - 1$, sarà la terza proporzionale eguale a $3 - 2\sqrt{2}$. Ora sia q il punto, dove il raggio Ar taglia il cerchio descritto col centro R. Sarà qr diametro di esso cerchio $= 2a$F $= 2\sqrt{2} - 2$; il qual valore sottratto da $1 =$ Ar, lascierà A$q = 3 - 2\sqrt{2}$ eguale a quella terza proporzionale. Dunque il punto q sarà nelle due circonferenze; ed essendo nella retta AR, la perpendicolare ad essa retta in q sarà tangente ai due cerchj, i quali si toccheranno in q (13., e 16. lib. 3.). Lo stesso si dimostrerà per gli altri.

PROBLEMA.

170. Trovare un arco di cerchio, che abbia il coseno eguale alla corda.

Fig. 85. *Soluzione*. Con un raggio AB supposto $= 1$ sia descritto l'arco BCDE, e si faccia ad $AB = BC = CD = DE = DP = CP$. Quindi si faccia a $BD = Ba = Ea$. Quindi ad $Aa = BF$. Col raggio PF, e col centro B si segni un arco, che tagli l'arco BC in Q. Sarà l'arco BQ il cercato.

Dimostrazione. I punti A, F, *a*, P sono nella stessa retta (§. 13.). I punti poi B, A, D, P essendo lontani dal punto C per la distanza CB sono nella circonferenza d'un cerchio, che si descrive col centro C, raggio CB. Inoltre essendo a $CB = BA = AD = DP$, sarà BCP diametro di questo cerchio (15. lib. 6.), e $PA = \sqrt{3}$ (§. 2.). Quindi $PF = \sqrt{3} - 1 = BQ$. Se ora si cala QR perpendicolare sopra AB, si avrà $(BQ)^2 = (AB)^2 + (AQ)^2 - 2AB \cdot AR$ (13. lib. 2.); cioè $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 2 - 2AR$, e quindi $AR = \sqrt{3} - 1 = BQ$, come si era proposto di fare.

Questi ultimi Problemi sono dell'Ozanam sciolti da esso colla riga, e col compasso.

PROBLEMA.

171. Dati gli assi BE, MN d'una elisse, descrivere intorno ad essi un' ovale composta di quattro archi di cerchio, che siano tangenti tra loro.

Fig. 86.

Soluzione. Col centro A, dove si tagliano gli assi, e col raggio AB, che è il semi-asse maggiore, si descriva la semi-circonferenza BDE, e si faccia ad EA = ED. Col centro B, e col raggio BD si tagli l'asse BE in *d*. Col centro A, e col raggio AM si tagli il semi-asse AE in *m*. Collo stesso centro A, e col raggio A*d* si descriva l'arco *de*, e si faccia ad E*m* = *de*. Con un raggio arbitrario, e coi centri *d*, ed *e* si tagli l'arco BDE in δ, ed ε. Col raggio δε, e col centro A si tagli l'asse BE in P, e Q. Coi centri P, e Q, e col raggio PB = QE si descrivano gli archi FB*f*, GE*g*, e si faccia a PB = BF = B*f* = EG = E*g*. Quindi si faccia a PQ = PR = P*r* = QR = Q*r*. Quindi col centro R, e col raggio RF si descriva l'arco FG, che passerà per M. Collo stesso raggio RF $= rf$, e col centro r si descriva l'arco fg, che passerà per N, e sarà fatto quanto volevasi.

Dimostrazione. Essendo equilateri i triangoli BFP, PQR, saranno eguali gli angoli BPF, QPR (8. lib. 1.); quindi le due FP, PR formeranno una sola retta, perchè i due angoli FPA + APR sono eguali ai due FPA + APN (13., e 14. lib. 1.). Dunque i due archi BF, FG si toccheranno l'un l'altro in F (13. lib. 3.). Lo stesso contatto si dimostra ai punti f, G, g. Se poi si supponga per brevità $AB = 1$, sarà $BD = \surd 3$ (§. 2.) $= Bd$; quindi $Ad = \surd 3 - 1$. Essendo poi $Ad : de :: A\delta : \delta e$ (§. 93.), sarà ancora moltiplicando tutti due i termini della prima ragione per $\surd 3 + 1$ (4. lib. 5.) $Ad(\surd 3 + 1) : de(\surd 3 + 1) :: A\delta : \delta e$, e sostituendo i valori numerici di Ad, ed $A\delta$, ed eseguendo la moltiplicazione nel primo termine, si avrà $2 : de(\surd + 1) :: 1 : \delta e$. Quindi $2\delta e = 2AP = de(\surd 3 + 1) = PQ = PR$. Essendo poi PRQ$r$ un rombo, si avrà (§. 139.) $(Rr)^2 = 4(PR)^2 - (PQ)^2 = 3(PR)^2$. Quindi $Rr = PR.\surd 3 = de\ (3 + \surd 3)$, ed $RA = \frac{1}{2} de\ (3 + \surd 3)$. Si ha poi $AM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de$. Quindi

$RA + AM = 1 + \frac{1}{2} de(1 + \sqrt{3})$, ossia $RM = 1 + \frac{1}{2} PR$. Essendo poi $PF = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} PR$, si avrà $PF + PR = 1 + \frac{1}{2} PR$, cioè $FR = RM$. Dunque l'arco FG passerà per M. Istessamente si mostrerà che l'arco *fg* passerà per *n*. Dunque ec.

PROBLEMA.

172. **D**escrivere una spirale BLEMFNGPH composta di più archi di cerchio.

Fig. 87.

Soluzione. Sia $BE = BF$ la distanza, che si vuol dare alle rivoluzioni di questa spirale. Divisa la BE per metà in A (§. 66.), col centro A, e col raggio AB si descriva la semiciconferenza BLE (§. 64.). Col centro B, e col raggio BE si descriva la semicirconferenza EMF. Di nuovo col centro A, e col raggio AF si descriva la semicirconferenza FNG. Di nuovo col centro B, e col raggio BG si descriva la semicirconferenza GPH. Nella stessa maniera si potrebbe proseguire questa spirale indefinitamente.

Si potrà allo stesso modo duplicare questa spirale, se preso il punto *b* ad una distanza qual si vuole da B sulla AB (§. 73.), coi centri A, e B a vicenda si descriveranno le semicirconferenze *ble*, *emf*, *fng*, *gph* ec.

Questo Problema non ha bisogno di dimostrazione.

PROBLEMA.

173. **T**rovare $\sqrt{\sqrt{2}}$, e $\sqrt{\sqrt{3}}$.

Soluzione. Col raggio AB = 1, e col centro A si descriva la semicirconferenza BCDE, facendo ad AB = BC = CD = DE. Quindi si faccia a BD = B*a* = E*a*. Quindi ad A*a* = BP; ad AB = EP. Sulla semicirconferenza si notino i punti H, I, K, facendo alla stessa AB = *a*H = HI = IK.

Fig. 88.

Col raggio AP, e coi centri E, ed H si segnino due archi, che si taglino in L, ed M. Sarà LM = $\sqrt{\sqrt{2}}$.

Col raggio AB, e coi centri *a*, e K si segnino due archi, che si taglino in Q ed R. Sarà QR = $\sqrt{\sqrt{3}}$.

Dimostrazione. Essendo ELHM un rombo, sarà (§. 139.) $(LM)^2 = 4(LH)^2 - (HE)^2 = 4(AP)^2 - (HE)^2$; ma $(AP)^2 = \frac{1}{2}$ (§. 104.), $(HE)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§§. 30., e 36.). Dunque $(LM)^2 = \sqrt{2}$; quindi $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Essendo pure $aQKR$ un rombo, si avrà egualmente $(QR)^2 = 4(aQ)^2 - (aK)^2$. Ma $(AQ)^2 = (AB)^2 = 1$; $(aK)^2 = 4 - \sqrt{3}$ (§. 160.). Dunque $(QR)^2 = \sqrt{3}$; quindi $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

174. Con simili artifizj si potrebbero trovare le radici quarte degli altri numeri interi senza servirsi del metodo di trovare le medie proporzionali (§. 99.). Con esso per avere $\sqrt{\sqrt{2}}$ si sarebbe dovuta trovare una media proporzionale tra 1, e $\sqrt{2}$, ovvero tra $\frac{1}{2}$, e $2\sqrt{2}$, o tra altre due quantità, che moltiplicate una per l'altra dessero $\sqrt{2}$. Ma la sua strada sarebbe molto più complicata. Se si coltiverà questa Geometria del Compasso, se ne avranno dei frutti utilissimi. Io tengo preparate sopra ciò altre ricerche, che potranno aver luogo in un' Opera più estesa di questa. Ecco un uso del Problema antecedente per rapporto alla Piramide tetraedra regolare.

PROBLEMA.

175. Dato il lato AB d' una piramide tetraedra regolare SABC; trovare I. la sua altezza. II. il lato d' un quadrato, che ne agguagli la superficie. III. il lato d' un quadrato, sul quale costruendo una piramide, che abbia per altezza il lato della proposta, la agguagli in solidità. IV. il lato d' un quadrato, sul quale costruendo una piramide d' altezza eguale alla proposta, l' agguagli anche in solidità. V. il raggio d' una sfera circoscritta.

Fig. 87.

Soluzione. Costruita col raggio AB la Figura 88., come nel Problema §. 173., col centro B, e col raggio Ba si descriva l' arco aN, e si faccia ad Aa = EN. Col raggio AN, e coi centri A, ed E si segnino due archi, che si taglino in n. Collo stesso raggio nA si tagli la semicirconferenza BCDE in S. Si divida LM per metà in m (§. 66.), così pure QR per metà in q. Sarà

I. BS l' altezza della piramide.

II. QR il lato del quadrato, che ne agguaglia la superficie.

III. M*m* il lato del quadrato base d' una piramide d' altezza eguale al lato della proposta, e ad essa eguale in solidità.

IV. Q*q* il lato del quadrato base d' una piramide di altezza, e di solidità eguale alla proposta.

V. AN il diametro d' una sfera circoscritta.

Dimostrazione. Se dal vertice S della piramide si cali una perpendicolare S*m* sul lato AB, essendo equilatero il triangolo SAB, essa taglierà in *m* per metà la AB (12. lib. 1.). Se quindi nella base ABC si alza alla AB da *m* la perpendicolare *m*T, essa passerà per C (11. lib. 1.), e sarà in essa il punto T, dove cade da S la perpendicolare sulla base (11. lib. 11.). Egualmente si dimostra, che il punto T sarà nella retta B*n*, che taglia per metà il lato AC. Si guidi la *mn*, essa sarà parallela alla BC (2. lib. 6.), e il triangolo A*mn* sarà equiangolo al triangolo ABC (27. lib. 1.), e la BC dupla della *mn* (4. lib. 6.). Saranno poi equiangoli tra loro i triangoli BCT, *mn*T (15., e 27. lib. 1.), e sarà $BC : mn :: CT : mT$ (4. lib. 6.). Dunque CT doppia della *m*T; quindi $mT = \frac{1}{3}Cm$. Posto poi $AB = 1$, si ha $Cm = Sm = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104.). Dunque

T*m*

$Tm = \frac{1}{6}\sqrt{3}$. Essendo poi $(Sm)^2 = (mT)^2 + (ST)^2$ (47. lib. 1.), cioè $\frac{3}{4} = \frac{1}{12} + (ST)^2$; si avrà $(ST)^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; quindi $ST = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Fig. 88. Si ha poi $AN = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (§. 104.) $= \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = An$. Si ha pure $An : AS :: AS : SB$ (§. 86.); cioè $\sqrt{\frac{3}{2}} : 1 :: 1 : SB$. Quindi

Fig. 89. $SB = \sqrt{\frac{2}{3}} = ST$. Che era il primo.

La superficie poi della piramide tetraedra è eguale al quadruplo della superficie della base

Fig. 89. ABC, la quale essendo eguale a $\frac{1}{2}AB \cdot Cm = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ (41. lib. 1.), sarà la superficie della piramide $= \sqrt{3}$. Quindi il lato del qua-

Fig. 88. drato, che l'agguaglia $= \sqrt{\sqrt{3}}$. Ma è la $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$ (§. 173.). Dunque la QR è il lato del quadrato cercato. Che era il secondo.

Essendo nelle piramidi eguali reciproche tra loro le basi, e le altezze (9. lib. 12.), si avrà $1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: \frac{1}{4}\sqrt{3}$: alla base della piramide, che ha l'altezza $= AB = 1$. Quindi sarà l'area di questa base $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$, e il lato del quadrato di quell'area $= \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}} = Mm$ (§. 173.). Che era il terzo.

Essendo le piramidi d'altezza eguale in ragione delle basi, il quadrato eguale al triangolo $ABC = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ avrà per lato $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}} = Qq$ (§. 173). Che era il quarto.

E' poi il diametro della sfera circoscritta alla piramide tetraedra la potenza sesquialtera del lato della piramide (13. lib. 13.), cioè $= \sqrt{\frac{3}{2}}$. E' dunque $= AN$. Che era il quinto.

PROBLEMA.

176. **D**ata l'altezza ST d'una piramide tetraedra regolare, trovare il suo lato AB.

Fig. 89. e 88.

Soluzione. Con un raggio AB (Fig. 88.) eguale ad ST (Fig. 89.) si descriva il semicerchio BCDE fatto ad AB = BC = CD = DE. Col centro B, e col raggio BD si descriva l'arco DN*a*, e collo stesso raggio, e col centro E si tagli in *a*. Col raggio A*a*, e collo stesso centro E si tagli in N. Sarà AN il lato cercato eguale al lato AB della Fig. 89.

Dimostrazione. Nella Figura 88. si ha AB : AN :: 1 : $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (§. 175.), ed essendo 1 : $\sqrt{\frac{1}{2}}$ :: $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 1, come resta dimostrato dall' eguaglianza del prodotto degli estremi, e de' medj, sarà AB ad AN come $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ad 1, cioè nel rapporto dell' altezza della piramide tetraedra al suo lato (§. 175.). Dunque ec.

PROBLEMA.

177. Dividere la $AB = 1$ in cinque parti eguali anche nel caso, che non ſi poſſa avere una quintupla della AB, come al §. 69.
Fig. 90.

Soluzione. Col raggio AB, e col centro A deſcritto il cerchio BDp, e fatto nella ſua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE$, quindi a $BD = Ba = B\alpha = Ea = E\alpha$, col raggio AB, e col centro α ſi tagli la circonferenza in g, e collo ſteſſo raggio, e col centro g ſi deſcriva l'arco $An\alpha$. Ora col raggio BE, e col centro a ſi tagli queſt'arco in n. Col raggio an, e col centro B ſi tagli la circonferenza in P, e p. Collo ſteſſo raggio pB, e coi centri p, e P ſi ſegnino due archi, che ſi taglino in Q. Sarà AQ una quinta parte della AB poſta ſulla ſua direzione.

Dimoſtrazione. Se ſi ſupponga un punto u ſulla direzione della AE, e ſia $Au = Aa$, ſarà per gli angoli retti aAu, αAu, $(au)^2 = 2(aA)^2 = 2(\alpha A)^2 = (\alpha u)^2 = 4 = (BE)^2$; quindi $au = \alpha u = BE = an$. Eſſendo poi eguali gli angoli gAB, $gA\alpha$ semiretti entrambi (§. 30.), saranno eguali tra loro gli angoli gAa, gAu ciascuno eguale a tre semiretti. Quindi nei due triangoli gAa, gAu aventi un angolo eguale compreso fra lati eguali sarà anche eguale il terzo lato ga. al terzo gu (4. lib. 1.); quindi un cerchio descritto col centro g raggio ga passerà per u, e sarà concentrico al cerchio $An\alpha$. Si ha poi $ga = \sqrt{5}$ (§. 185.), ed essendo $an = u\alpha$, si ha (§. 93.) $ga : gA :: au : n\alpha$, cioè $\sqrt{5} : 1 :: 2 : n\alpha$. Dunque sarà $n\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Quindi anche ciascun lato del rombo $PBpQ$ $= n\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Quindi se si confrontino i punti P, B, p, Q, A di questa Figura 90. coi punti A, p, B, P, Q della Figura 3., si avrà per la Figura 90. $BQ \cdot BA = (BP)^2$ (§. 19.), cioè $BQ = \frac{4}{5}$. Quindi AQ, che è nella stessa retta (§. 13.) $= \frac{1}{5}$.

178. Questo Problema, che ha una Soluzione abbastanza semplice, non doveva essere ommesso in grazia della divisione decimale, che si eseguisce dividendo in due, quindi in cinque, o viceversa. Serve ancora al seguente

PROBLEMA.

179. Descrivere un triangolo rettangolo,
Fig. i di cui lati siano in proporzione arit-
90. metica.

Soluzione. Fatta la costruzione della Soluzione precedente (§. 177.), col centro E, e col raggio EQ si tagli la circonferenza in N. Sarà il triangolo BNE il cercato.

Dimostrazione. Esso sarà rettangolo (31. lib. 3.). Posto poi AB $=1$, sarà EQ $=$ EA $+$ AQ $= \frac{6}{5} =$ EN. Ed avendosi $(BE)^2 = (EN)^2 + (BN)^2$ (47. lib. 1.), cioè $4 = \frac{36}{25} + (BN)^2$, sarà $(BN)^2 = \frac{64}{25}$, quindi BN $= \frac{8}{5}$. Quindi saranno i lati EN $= \frac{6}{5}$, BN $= \frac{8}{5}$, BE $= \frac{10}{5}$ in proporzione aritmetica.

PROBLEMA.

180. Descrivere un triangolo rettangolo,
Fig. i di cui lati siano in proporzione geo-
91. metrica.

Soluzione. Con un raggio AB centro A si descriva un cerchio BDd, e si faccia nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Quindi si faccia a $BD = Ba = Ea$, quindi ad $Aa = Db = db = C\beta = c\beta$. Ora col raggio $b\beta$, e col centro E si tagli la circonferenza del cerchio in N. Il triangolo BNE sarà il cercato.

Dimostrazione. La AB resta divisa in b in estrema, e media ragione (§. 46.). Quindi se si faccia $AB = 1$; $Ab = x$, si avrà $Bb = 1 - x$; $x^2 = 1 - x$; e quindi $x = Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, donde risulta $b\beta = 2Ab = \sqrt{5} - 1 = EN$. Si ha poi $(BE)^2 = EN^2 + (BN)^2$ (31. lib. 3. 47. lib. 1.), cioè $4 = 6 - 2\sqrt{5} + (BN)^2$. Quindi $(BN)^2 = 2(\sqrt{5} - 1) = BE . NE$. Si ha dunque $BE : BN :: BN : NE$ (17. lib. 6.). Dunque ec.

181. *Lemma*. Posti i lati dei cinque poliedri regolari $= 1$; sarà il raggio d' una sfera, che contiene il tetraedro $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$
il cubo $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$
l' ottaedro $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$
il dodecaedro $= \frac{1}{4}\sqrt{3} . (\sqrt{5} + 1)$
l' icosaedro $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$

Dimostrazione. Per la 13. lib. 13. il diametro della sfera, che contiene la piramide com-presa da quattro triangoli equilateri, è per potenza sesquialtero del lato della piramide, cioè posto il lato $= 1$, è il diametro $= \sqrt{\frac{3}{2}}$; quindi il raggio $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Per la 15. lib. 13. il diametro della sfera, che contiene il cubo, è per potenza triplo del lato, cioè $= \sqrt{3}$; quindi il raggio $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Per la 14. lib. 13. il diametro della sfera, che comprende l'ottaedro, cioè quel corpo regolare, che ha otto faccie tutte triangoli equilateri, è duplo in potenza del lato d'uno di questi triangoli, cioè $= \sqrt{2}$; quindi il raggio $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Per la 17. lib. 13. la sfera, che comprende il dodecaedro, cioè quel corpo regolare, che ha dodici faccie tutte pentagoni regolari, comprende anche un cubo, che ha per lato una diagonale di quei pentagoni. Ma la diagonale BN (Fig. 64.) d'un pentagono ABLMN posto il lato $AB = 1$, dico che è $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Poichè è (§. 137.) $BN = bE = Ab + AE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) + 1$ (§. 180.) $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Dunque la BN, ossia la diagonale d'un pentagono, che ha il lato $= 1$, è $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Se sopra questa si forma un cubo, il diametro della sfera, che lo comprende, sarà di potenza triplo di questa, cioè $= \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{3}$. Dunque il raggio di questa sfera, che comprende il dodecaedro, è $= \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot(\sqrt{5} + 1)$.

Per la 16. lib. 13. se sia AB il diametro della sfera, che comprende l'icosaedro, e presa in esso la AC quadrupla di CB, e alzata la perpendicolare CD, che incontra in D la semicirconferenza ADB, se col raggio DB si descrive un cerchio, e in questo cerchio un pentagono regolare, il lato di questo pentagono sarà il lato dell'icosaedro, cioè di quel corpo regolare, che ha venti faccie tutte triangoli equilateri. Ora il lato del pentagono ha quel rapporto al raggio del cerchio circoscritto, che ha la retta B*b* alla BA Fig. 12. (§. 40.). Ma posto $AB = 1$, si ha $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$; $(Ab)^2 = \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$; $(Bb)^2 = (AB)^2 + (Ab)^2$ (47. lib. 1.) $= \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. Quindi si avrà

Fig. 92.

$Bb : AB :: \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} : 1$; ma si ha

$\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} : 1 :: 1 : \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}$.

Dunque posto il lato dell'icosaedro $= 1$, sarà

BD (Fig. 92.) $= \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}$. Si ha poi

$(AB)^2 = 5(BD)^2$ (16. lib. 13.) $= \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

Dunque $AB = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$, e il raggio

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

PROBLEMA.

182. Dato il lato AB dei cinque corpi
Fig. 93. regolari, trovare il raggio delle diverse sfere, che li comprendono.

Soluzione. Col raggio AB centro A si descriva il cerchio BD*d*, e si faccia nella sua circonferenza ad AB = BC = CD = DE = E*d*. Quindi si faccia a BD = B*a* = Bα = Eα = E*a*. Col centro α, e col raggio α*a* si descriva l'arco *a*P. Collo stesso centro α, e col raggio αB si descriva l'arco B*pqs*. Collo stesso centro α, e col raggio AB si descriva l'arco *grt*. Collo stesso centro α, e col raggio BE si descriva l'arco MQRST. Col raggio A*a*, e coi centri D, *d* si descrivano due archi, che si taglino in *b*. Col raggio A*b*, e col centro E si tagli la circonferenza in L. Si faccia ad AB = *a*P = MQ, quindi ad A*a* = MR, quindi ad E*b* = MS, quindi a BL = MT. Si faccia poi ad *a*B = P*p*, quindi ad MB = Q*q* = S*s*, quindi ad M*g* = R*r* = T*t*. Sarà

Bp	il raggio	il tetraedro
Bq	della sfera,	il cubo
gr	che	l' ottaedro
Bs	comprende	il dodecaedro
gt		l' icosaedro

Dimostrazione. Posto $AB = 1$, si ha $\alpha a = 2\sqrt{2}$ (§. 100.), $\alpha B = \sqrt{3}$. Si ha poi $\alpha a : \alpha B :: aP : Bp$ (§. 93.), cioè $2\sqrt{2} : \sqrt{3} :: 1 : Bp$. Sarà dunque $Bp = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Quindi ec. (§. 181.).

Si ha pure (§. 93.) $\alpha M : \alpha B :: MQ : Bq$, cioè $2 : \sqrt{3} :: 1 : Bq$. Quindi $Bq = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Parimente si ha $\alpha M : \alpha g :: MR : gr$, cioè $2 : 1 :: \sqrt{2} : gr$; quindi $gr = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Si ha egualmente $\alpha M : \alpha B :: MS : Bs$. Ma $MS = bE = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ (§. 181.), dunque $2 : \sqrt{3} :: \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) : Bs$. Quindi $Bs = \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1)$.

Si ha finalmente $\alpha M : \alpha g :: MT : gt$. Ma $MT = BL$. E' poi $(BL)^2 = (BE)^2 - (EL)^2$ (31. lib. 3. 47. lib. 1.), cioè $(BL)^2 = (BE)^2 - (Ab)^2 = 4 - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ (§. 181.) $= \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$. Quindi $BL = MT = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$; e però $2 : 1 :: \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} : gt$; e quindi $gt = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$.

Dunque le distanze Bp, Bq, gr, Bs, gt saranno rispettivamente i raggi delle sfere, che comprendono i cinque corpi regolari piramide, cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.

PROBLEMA.

183. Dato il raggio AB della sfera, che comprende i cinque corpi regolari, trovare i lati di essi.

Fig. 94.

Soluzione. Sia col raggio AB, centro A descritto il cerchio massimo della sfera BDd, e sia fatto nella sua circonferenza ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi a $BD = Ba = Ea$; quindi ad $Aa = Db = db$.

Si faccia poi nella circonferenza ad $AB = aH$, quindi ad $Aa = EF = Hh$. Col centro a, e col raggio aE si descriva l'arco ESQP. Collo stesso centro a, e col raggio BE si descriva l'arco $Lstqp$. Collo stesso centro a, e col raggio ah si descriva l'arco hT. Si faccia ad $Aa = EP$; ad $AB = EQ$; ad $Ab = ES$; a $bF = hT$. Quindi si faccia ad $EL = Pp = Qq = Ss$; quindi ad $hL = Tt$. Sarà

Lp	il lato	tetraedro
Lq	del	cubo
Aa		ottaedro
Ls		dodecaedro
Lt		icosaedro

Dimostrazione. Si ha l'arco Eh eguale ad una ottava parte della circonferenza (§. 30.); quindi $ah = \sqrt{5}$ (§. 185.). Essendo poi retto l'angolo bAF lo stesso, che BAF per essere il punto b sulla AE (§§. 13. 27.), sarà bF il lato del pentagono (§. 40.), Ab il lato del decagono inscritto al cerchio BDd (§. 41.). Posto dunque $AB = 1$, sarà $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§. 180.), $(bF)^2 = (AF)^2 + (Ab)^2 = 1 + \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$; quindi $bF = hT = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)}$. Si avrà poi $aE : aL :: EP : Lp$ (§. 93.), cioè $\sqrt{3} : 2 :: \sqrt{2} : Lp$. Sarà dunque $Lp = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del tetraedro contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : 1$ (§. 181.) $:: 1 : 2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Posto dunque il raggio AB della sfera $= 1$; sarà Lp il lato del tetraedro contenuto.

Si avrà pure (§. 93.) $aE : aL :: EQ : Lq$, cioè $\sqrt{3} : 2 :: 1 : Lq$; quindi $Lq = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del cubo contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$ (§. 181.) :: $1 : 2\sqrt{\frac{1}{3}}$. Dunque ec.

Si avrà parimente $Aa = \sqrt{2}$ lato dell'ottaedro. Poichè il rapporto del raggio della sfera al lato dell'ottaedro contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ (§. 181.) :: $1 : \sqrt{2}$. Dunque ec.

Egualmente si avrà $aE : aL :: ES : Ls$, cioè $\sqrt{3} : 2 :: \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) : Ls$; quindi $Ls = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato del dodecaedro contenuto è $= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1) : 1$ (§. 181.) :: $1 : \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}$. Dunque ec.

Finalmente si avrà $ah : aL :: hT : Lt$ (§. 93.), cioè $\sqrt{5} : 2 :: \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} : Lt$. Quindi $Lt = 2\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)}$. Ora il rapporto del raggio della sfera al lato dell'icosaedro contenuto è $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)} : 1$ (§. 181.) :: $1 : 2\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)}$. Dunque ec.

PROBLEMA.

184. Dato un punto B nella circonferenza
Fig. 95. di un cerchio dato; trovare altri due punti L, ed M, tali che il triangolo BLM sia equilatero, e tocchi il cerchio col lato LM alla metà di esso lato in E.

Soluzione. Si faccia al raggio del cerchio dato AB = BC = CD = DE = Ed nella circonferenza di esso. Quindi si faccia a BD = Ba = Ea. Col centro a, e col raggio aA si descriva un arco, che passi per α. Col centro E, e col raggio EA si descriva un arco, che lo tagli in α. Collo stesso raggio αE, e col centro α si tagli la circonferenza in P. Ora col raggio EP, e col centro E si descriva un arco, che passi per L, ed M. Col raggio aP, e coi centri D, e d si segnino due archi, che taglino il precedente in L, ed M. Saranno L, ed M i due punti cercati.

Dimostrazione. Confrontando i punti aAEαP di questa Figura 95. coi punti QApBP della Figura 3. dall'equazione $(AQ)^2 = (Ap)^2 + (pQ)^2 - pP \cdot pQ$ appartenente alla Fig. 3. (§. 17.) si ricaverà l'equazione per questa Figura 95. $(Aa)^2 = (AE)^2 + (Ea)^2 - EP \cdot Ea$. Quindi (§. 27.) $2 = 1 + 3 - EP \cdot \sqrt{3}$. Quindi $2 = EP \cdot \sqrt{3}$; ed $EP = \frac{2}{3}\sqrt{3}$. Essendo poi i tre punti E, P, a nella stessa retta (§. 13.), sarà $Pa = Ea - EP = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Si supponga guidata la BE, che tagli in R la Dd; sarà (§. 104.) $BR = \frac{3}{2}$; $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $BE = 2$; quindi la quarta proporzionale alle tre BR, RD, BE sarà $= \frac{2}{3}\sqrt{3} = EM$. Sarà pure (§. 104.) $RE = \frac{1}{2}$, $BD = \sqrt{3}$ (§. 2.). Quindi la quarta proporzionale alle tre BR, BD, RE sarà $= \frac{1}{3}\sqrt{3} = DM$. Saranno dunque le EM, DM della quantità richiesta, perchè il triangolo BEM riesca simile al triangolo BRD (2. lib. 6.). Dunque saranno simili, poichè il punto M non potrebbe cascare in altro luogo (8. lib. 1.). Si proverà nella stessa maniera, che il triangolo BRd è simile al triangolo BEL. Quindi il triangolo BDd è simile al triangolo BML (20. lib. 6.). Dunque anche questo è equilatero. Sono inoltre retti gli angoli BEM, BEL eguali agli angoli BRD, BRd, e sono eguali le rette EM, EL. Dunque il triangolo BLM è il cercato.

PROBLEMA.

185. In un cerchio di raggio dato AB inscrivere cinque quadrati eguali, de' quali uno sia concentrico al cerchio, e gli altri lo tocchino, avendo ciascuno un lato comune col quadrato di mezzo.

Fig. 96.

Soluzione. Si facciano al raggio AB eguali le corde BC, CD, DE. Si faccia a $BD = Ba = Ea$. Ad Aa si facciano eguali le corde BF, Bf. Col raggio AB, e col centro a si tagli il cerchio in G, e si faccia ad Aa eguale la corda Gg. Col raggio ga, e col centro g si descriva un arco aP, e si faccia sotto esso la corda $aP = aA$. Collo stesso centro g, e col raggio gA si descriva un arco Ap sulla direzione dell' arco aP. Si faccia ad $aA = Pp$. Si facciano ora ad Ap eguali le corde Bq, fn, Em, Fl. Collo stesso raggio Ap, e coi centri B, q, f, n, E, m, F, l si descrivano degli archi, che si taglino dentro il cerchio in L, Q, N, M. Sarà LMNQ il quadrato centrale, BLQq, fQNn, ENMm, FMLl gli altri quadrati cercati.

Dimo-

Dimostrazione. Se si confrontino i punti a, A, G, B, g di questa Figura coi punti Q, p, A, R, S della Figura 4., si avrà dal §. 21. l'equazione per questa Figura 87. $(ag)^2 = (aB)^2 + Gg \cdot Aa$. Cioè posto il raggio AB $= 1$, $(ag)^2 = 3 + 2 = 5$ (§. 27.); quindi $ag = \sqrt{5}$. E' poi $aP = aA = \sqrt{2}$. Ora si ha $ga : aP :: gA : Ap$ (§. 93.), cioè $\sqrt{5} : \sqrt{2} :: 1 : Ap$. Quindi $Ap = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = Em$. Essendo poi BCDE una semicirconferenza (§. 64.), sarà BmE un angolo retto (31. lib. 3.), quindi $(BE)^2 = (Bm)^2 + (mE)^2$; cioè $4 = (Bm)^2 + \frac{2}{5}$. Quindi $(Bm)^2 = 9 \cdot \frac{2}{5}$, e $Bm = 3\sqrt{\frac{2}{5}} = 3mE$. Dello stesso valore si troverà essere qE, e si dimostrerà esser retti tutti gli altri angoli del quadrilatero $BmEq$, che sono in semicerchj. Dunque esso è un parallelogrammo rettangolo. Istessamente si dimostra essere un parallelogrammo rettangolo $Flfn$. Se si faccia la corda $Em = k$, sarà mF corda del complemento al quadrante $= h$ (§. 159.), e si avrà $h^2 = 2 - 2k\sqrt{(1 - \frac{1}{4}k^2)}$. Quindi essendo $k^2 = \frac{2}{5}$, si avrà $h^2 = 2 - 2k\sqrt{\frac{9}{10}} = 2 - 2\sqrt{\frac{9}{25}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5} = 2k^2$, cioè $(Fm)^2 = (FM)^2 + (Mm)^2$. Quindi l'angolo FMm sarà retto (48. lib. 1.); così gli altri BLl, fQq, ENn. Se poi si chiami x la distanza del punto m dal punto dove cade la perpendicolare da F sopra la Bm, si avrà (13, lib. 2.) $(BF)^2 = (Fm)^2 + (Bm)^2 - 2Bm \cdot x$, cioè $2 = \frac{4}{5} + \frac{18}{5} - 6x\sqrt{\frac{2}{5}}$. Quindi $x\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$, e dividendo per $\sqrt{\frac{2}{5}}$, si ha $x = \sqrt{\frac{2}{5}} = mM$. In seguito se si chiami y la perpendicolare, che da F cade sulla Bm, si avrà $y^2 = (Fm)^2 - x^2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$; quindi $y = \sqrt{\frac{2}{5}} = FM$. Quindi si dimostra essere il punto M sulla Bm. Egualmente si dimostra esservi il punto L. Essendo dunque $Bm = 3Em = Mm + BL + Em$; sarà anche $LM = Em$. Si dimostrano poi dello stesso valore gli altri lati MN, NQ, LQ. Dalle cose dette fin quì resta pur dimostrato essere retti gli angoli ai punti L, M, N, Q esterni al quadrilatero LMNQ, dunque lo saranno anche gli interni, e si avranno i cinque quadrati, che si volevano.

PROBLEMA.

186. Dati i cinque punti A, B, C, D, E
Fig. estremi di un pentagono regolare; tro-
97. vare i cinque punti a, b, c, d, e, nei quali si taglierebbero le diagonali di esso pentagono.

Soluzione. Col lato del pentagono AB preso per raggio, e coi centri A, B, C, D, E si segnino degli archi, che si taglino in a, b, c, d, e. Sarà fatto.

Dimostrazione. Se si suppongano condotte le diagonali, e segnati i lati del pentagono ABCDE, si avrà l'angolo BAC = BDA (29. lib. 3.) = CAD. Quindi Ab = bD (6. lib. 1.). Si avrà poi BbA = bDA + bAD (32. lib. 1.) = BAb + bAD = BAD = ABD (5. lib. 1.). Quindi il triangolo ABb sarà isoscele (6. lib. 1.), cioè sarà AB = Ab = bD. Dunque ec.

Questa Figura è il pentalfa, ossia l'igía di Pitagora.

PROBLEMA.

187. In un cerchio di raggio dato AB inscrivere sei pentagoni regolari.

Fig. 98.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza ad AB = BC = CD = DE = Ed. Quindi a BD = Ba = Ea. Quindi ad Aa = BF = Db = db. Si faccia nella circonferenza a bF = BP = PQ = QR = RS. Collo stesso raggio bF, e coi centri B, P, Q, R, S si segnino degli archi, che si taglino in β, p, q, r, s.

Ora col raggio βp, e coi centri β, P si segnino due archi, che si taglino in c. Collo stesso raggio, e coi centri P, p si segnino due archi, che si taglino in d. Si avranno due dei pentagoni cercati, cioè $\beta p q r s$ pentagono al centro A, e $\beta p d$ P c, che tocca il cerchio dato in P. Nella stessa guisa si troveranno i vertici, che mancano agli altri quattro pentagoni $p q f$ Q e, $q r h$ R g, $r s k$ S i, $s \beta m$ B l.

Dimostrazione. Saranno i punti B, P, Q, R, S estremi di un pentagono regolare inscritto al cerchio dato (§. 40. 128.). Quindi saranno i punti β, p nella diagonale BQ; i punti p, q nella diagonale PR (§. 186.), ed essendo Bp = βQ, sarà Bβ = pQ. Istessamente si proverà Pp = qR, e per essere BQ = PR (27. lib. 3.), sarà anche Bβ = Pp; e βp = $p q$. Istessamente si proverà, che sono uguali tra loro tutti i lati del pentagono $\beta p q r s$. Si ha poi l'angolo $\beta p q$, cioè BpR = BPR + PBp (32. lib 1.); ma PBp cioè PBQ = QPR. Dunque $\beta p q$ = BPQ. Istessamente si dimostra, che gli altri angoli del pentagono $\beta p q r s$ sono eguali agli angoli del pentagono BPQRS. Dunque sono entrambi regolari. Si avrà inoltre l'angolo

QBR, formato da due diagonali del pentagono BPQRS, che è l'angolo βBs eguale all'angolo βqs formato da due diagonali del pentagono $\beta pqrs$ (20. lib. 6.). Quindi essendo isosceli entrambi i triangoli βBs, βqs, avranno eguali tra loro anche gli angoli alla base comune βs (§. 32. lib. 1.); quindi anche i triangoli saranno in tutto eguali (26. lib. 1.). Quindi i triangoli $Bm\beta$, βpq avendo tutti i lati eguali tra loro, avranno eguali anche gli angoli (8. lib. 1.), come pure i triangoli Bls, srq. Quindi tutti i lati, e gli angoli del pentagono $Bm\beta sl$ saranno eguali ai lati, e agli angoli del pentagono $\beta pqrs$, e però entrambi saranno regolari. Lo stesso si dimostra degli altri pentagoni $\beta cPdp$, $peQfq$, $qgRhr$, $riSks$. Dunque ec.

188. Il punto b sarà centro del pentagono $\beta mBls$, e la distanza bB raggio del cerchio circoscritto ad esso pentagono, e agli altri eguali, come dimostreremo subito; il che aggiunge una nuova bella proprietà al punto b già rimarcato tante volte in questa Geometria. Poichè oltre alle divisioni in estrema, e media ragione, che per esso nascono nel diametro BAE (§. 45. 46.), e la determinazione fatta per esso della bF lato del pentagono inscritto al cerchio di raggio AB (§. 40.), e della bA lato del decagono in-

scritto allo stesso cerchio (§. 41.); si ha ancora Bb raggio del cerchio circoscritto ai sei pentagoni, che si possono inscrivere al maggior cerchio di raggio AB, come nel presente Problema. Diffatti posto il raggio $AB = 1$, si ha $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§. 180.); essendo poi $(BE)^2 = (BQ)^2 + (QE)^2$ (31. lib. 3.) $= (BQ)^2 + (Ab)^2$; ne verrà $BQ = \sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)}$. Si ha poi $\beta Q = BP$ $= bF = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)}$ (§. 181.). Quindi $BQ : \beta Q :: BQ . \beta Q : (\beta Q)^2 :: \sqrt{5} : \frac{5 - \sqrt{5}}{2} :: 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) :: BA : bA$.

Quindi $BQ : BQ - \beta Q :: BA : BA - bA$, cioè $BQ : B\beta :: BA : Bb$. Saranno dunque le due diagonali dei pentagoni BPQRS, $Bm\beta sl$ tra loro come $BA : bA$. Essendo dunque BA raggio del primo pentagono; sarà Bb raggio del secondo (20. lib. 6.).

PROBLEMA.

189. Dati i vertici di un esagono regolare BCDEdc; trovare i punti l, m, n, g, p, q, nei quali si tagliano le sue diagonali, che non passano pel centro.

Fig. 99.

Soluzione. Si faccia a BD = Ba = Ea; quindi a BC = BA = CA = Bα; ad aA = $a\alpha$; ad αB = αP = AP. Ora col raggio aP, e coi centri B, C si segnino due archi, che si taglino in l; coi centri C, D altri due, che si taglino in m, e così via via. Saranno questi i punti cercati.

Dimostrazione. Si supponga, che le diagonali indicate si taglino in l, m, n, g, p, q. Essendo l'angolo BDc = DcE (29. lib. 3.), sarà BD parallela a cE (28. lib. 1.). Sarà dunque il triangolo Clm simile al triangolo CcE (2. 5. lib. 6.), e però equilatero. Istessamente lo sarà il triangolo Blq simile al triangolo BDd. Essendo poi il triangolo CcE eguale al triangolo BdD per avere i lati eguali a quelli di esso (§. 2.) (8. 4. lib. 1.), ed essendo il lato BD, e quindi lm egualmente distante dal lato cE, che il lato Cc, e quindi ql dal lato dD (14. lib. 3.), se si sovrapponga il triangolo BdD al triangolo CcE, la retta ql cascherà sulla retta lm, e le sarà eguale. Ma è Bl = lq. Dunque Bl = lm. Istessamente si dimostra, che è Dm = ml. Dunque è Bl = $\frac{1}{3}$BD = $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (ponendo il raggio del cerchio BC = AB = 1) (§. 2.). Istessamente

$Cl = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Ma si sono appunto prese $Bl = Cl = aP = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ (§. 184.). Dunque l è uno dei punti cercati. Lo stesso si dimostra degli altri punti m, n, g, p, q. Dunque ec.

PROBLEMA.

190. Nel cerchio di raggio dato AB inscrivere sette esagoni regolari, uno de' quali sia concentrico al cerchio, e gli altri siano disposti intorno ad esso.

Fig. 100.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza del cerchio dato ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi a $DB = DV = dV$. Col raggio CV, e coi centri C, ed A si segnino due archi, che si taglino in P. Collo stesso raggio PC, centro P si tagli la circonferenza del cerchio dato in δ. Sarà $d\delta$ il lato degli esagoni da inscriversi, i quali si inscriveranno facilmente uno presso l'altro. Poichè collo stesso lato $d\delta$ preso per raggio, e coi centri d, δ si segnino due archi, che si taglino in ε. Collo stesso raggio, e col centro a si descriva un cerchio, dentro il quale si inscriva un esagono regolare (15. lib. 4.) $d\delta mnpq$. Collo stesso raggio, e col centro A si descriva un cerchio, che passerà per np. In esso si descriva l'esagono, che ha per uno dei lati pn. Sopra i lati di questo esagono si descrivano gli altri esagoni, come si è fatto da prima sul lato $d\delta$, e sarà fatto quanto volevasi.

Dimostrazione. Posto per brevità $AB = 1$; sarà $CP = CV = \sqrt{7}$ (§. 100.) $= AP$. Sarà poi $AP : A\delta :: A\delta : \delta d$ (§. 86.); cioè $\sqrt{7} : 1 :: 1 : \delta d$; quindi $\delta d = \sqrt{\frac{1}{7}}$. Si suppongano per un momento inscritti gli esagoni cercati, e sia l'incognita $d\delta$ lato di essi $= x$; si divida essa per metà in ν, e si guidi la $A\nu$, che le sarà perpendicolare (§. 83.), e passerà per a centro dell'esagono, di cui è lato la $d\delta$, tagliando pure per metà in μ il lato pn dell'esagono centrale. Essendo nel triangolo equilatero Apn, $pn : A\mu :: 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104.); si avrà $x : A\mu :: 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, quindi $A\mu = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$, e quindi $A\nu = 3A\mu = \frac{3}{2}x\sqrt{3}$; è poi $d\nu = \frac{1}{2}x$. Essendo poi $1 = (Ad)^2 = (A\nu)^2 + (d\nu)^2$; sarà $1 = \frac{27}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 7x^2$; quindi $x^2 = \frac{1}{7}$, ed $x = \sqrt{\frac{1}{7}}$, della quale grandezza si è appunto determinata la $d\delta$ nella Soluzione del

Problema, come si è dimostrato quì sopra. Dunque ec.

Questo Problema si trova in Pappo Lib. 8. Probl. 15. Prop. 19. sciolto colla riga, e col compasso non più semplicemente di così. Egli vi ha pure aggiunta una costruzione meccanica.

191. Noi crediamo di avere omai adempito quanto abbiamo promesso ai §§. 6., e 7. E quanto al primo punto abbiamo già dati tutti gli elementi della *Geometria del Compasso*; cioè tutti que' Problemi, che bastano a potere col solo compasso senza la riga trovare tutti que' punti, che si possono trovare col compasso, e colla riga insieme. Per dimostrar questo (§. 71.) si osservi primo, che per via della Geometria Elementare i punti d'un Problema si trovano o colla sezione degli archi fra loro, e questa è tutta cosa propria della Geometria del compasso, o colle sezioni degli archi, e delle rette, o delle rette fra loro, e tutto questo articolo vien ad essere compreso dal Libro Settimo §. 110., e seguenti. Una retta poi qualunque, che sia necessaria alla Soluzione d'un Problema, viene determinata dalla grandezza, e dalla posizione. Per rapporto alla grandezza abbiamo insegnato ad ingrandire, diminuire, dividere qualunque grandezza finita in qualunque numero di parti nel Libro Terzo §. 64., e seguenti, e nel Libro Quarto §§. 72., 73. e 74.; a trovare poi le terze, le quarte, le medie proporzionali, così parimente

a dividere una retta in qualunque ragione data, nel Libro Quinto §. 86., e seguenti. Riguardo alla posizione delle rette, essa si determina per via della posizione di due punti per ciascuna; ora servirà il Libro Quarto §. 76., e seguenti a ritrovare i punti per ogni caso delle perpendicolari, e delle parallele. Per collocar le rette tra loro ad ogni altro angolo dato per via di due punti, somministrerà quanto è necessario il Libro Ottavo §. 113., e seguenti. La divisione della circonferenza del cerchio, e d' ogni arco in ogni maniera possibile alla Geometria Elementare è esaurita nel Libro Secondo §. 27., e seguenti. Dopo tutto ciò non veggo quale altro elemento si possa desiderare. Quanto poi riguarda la scelta dei Problemi, che abbiamo quì raccolti, lascieremo che i Matematici giudichino, se in un gran numero di casi utili, o dilettevoli non sia pregio dell' opera non solo per la precisione del risultato, ma ancora per la speditezza della costruzione abbandonare la riga, e servirsi del solo compasso fino a quel termine, che trovati tutti i punti necessarj al Problema, si abbia, se ciò bisogna, a condurre da un punto all' altro una, o più rette, le quali certo col solo compasso segnar non si possono, ed abbisognano della riga.

DELLA GEOMETRIA DEL COMPASSO

LIBRO DUODECIMO.

PROBLEMI PER APPROSSIMAZIONE.

192. TUtti i Problemi superiori al secondo grado non si possono sciogliere geometricamente colla sola riga, e col compasso; ma richieggono intersezioni di curve coniche, o di gradi superiori; quindi non si ponno risolvere nemmeno colla sola Geometria del Compasso esattamente. Gli stromenti per descrivere la cicloide, la concoide, la cissoide, la trattoria, ed altre tali curve, che servono alla risoluzione di que' Problemi, benchè inventati con grande ingegno, e riusciti nella pratica eleganti, e spediti, non ostante quando non si tratti di avere tutto l'andamento di quella curva, alla quale sono destinati, ma solo di ottenere un punto coll'intersezione di quella con altre linee, lasciano certo in pratica tale dubbio di piccoli errori talvolta non ben calcolabili, che si avrà in moltissimi

casi a preferire all' esattezza teorica di que' metodi un' approssimazione pratica abbastanza grande d' una costruzione fatta col compasso, e colla riga. In questi casi dico, che il maggior numero delle volte sarà preferibile ancora una risoluzione ottenuta col solo compasso. Gli esempj lo mostreranno a chi vorrà fare il confronto delle nostre Soluzioni colle già conosciute.

193. Non essendovi finora metodo generale per ottenere colla Geometria Elementare queste approssimazioni; non si dovrà aspettare, che nemmeno io ne proponga uno per la mia Geometria del Compasso. Io non chiamo metodo Geometrico di approssimazione quello di ottenere prossimamente un valore coll' ajuto d' una di quelle scale, che si dicono geometriche, poichè all' uso di essa dovendo precedere un calcolo aritmetico; il metodo stesso si deve piuttosto chiamare aritmetico. Si supponga, per esempio, che si voglia la radice cubica del numero 2; l' estrazione, che si vuol fare aritmeticamente di questa radice per poter poi prendere le parti decimali, o rotti di altra natura sopra una scala geometrica col compasso, ad oggetto di duplicare qualche cubo, fa sì, che il ripiego sia di ragione dell' Aritmetica, piuttosto che della Geometria.

194. Io non ho potuto specolare finora altro

mezzo di ottenere prossimamente la Soluzione di molti Problemi utili, superiori al secondo grado, fuori di quello di trovare varj generi, e come classi di costruzioni di figure elementari; quindi di assoggettare al calcolo il più gran numero, che si possa, dei casi particolari pressochè innumerabili, che ne risultano. Tra essi scegliere quelli, che servono meglio all' intento, e adoperarli a risolvere il Problema.

195. Di questi generi, e quasi classi di costruzioni io ne ho esaminate molte, e tengo a parte delle ricerche sulle medesime. La più semplice classe, e quella, della quale quasi unicamente faremo uso in quest' ultimo Libro della nostra Geometria, è fondata sui tre punti memorabili a, b, ed e Fig. 9., 11. e 12. (§. 59.), che ci hanno già servito tanto ne' Libri antecedenti, e sui quali venghiamo ad esporre le dodici equazioni da noi promesse (§. 59.).

196. Sia il punto Z considerato per un punto
Fig. qualunque preso sul quarto di circonferenza
12. BF nella Figura 12. costruita come nel Libro Secondo, e nell' altro quarto Bf sia il punto z, cosicchè si abbia Bz = BZ. Si avrà (§§. 20. e 21.)

$$(A)\ldots(aZ)^2 = (aB)^2 - Zz \cdot Aa$$
$$(B)\ldots(bZ)^2 = (bB)^2 + Zz \cdot Ab$$
$$(E)\ldots(eZ)^2 = (eB)^2 - Zz \cdot Ae$$

197. Se vogliamo le equazioni per le distanze dei tre punti a, b, ed e dal punto z, non si avranno, che a cambiare i segni nel secondo membro delle equazioni antecedenti, e si avrà (§§. 20. e 21.)

$$(A')\ldots(az)^2 = (aB)^2 + zZ \,.\, Aa$$
$$(B')\ldots(bz)^2 = (bB)^2 - zZ \,.\, Ab$$
$$(E')\ldots(ez)^2 = (eB)^2 + zZ \,.\, Ae$$

198. Essendo Zz corda dell'arco doppio di BZ $= 2$ sen. BZ; ed essendo nella supposizione di $AB = 1$, che noi sempre riterremo, $(aB)^2 = (BD)^2 = 3$ (§. 2.); $(Aa)^2 = 2$ (§. 27.); $(Bb)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ (§. 181.); $(Ae)^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§. 38.), quindi $(eB)^2 = (AB)^2 + (Ae)^2 = 3 - \sqrt{2}$; $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§. 180.); se si faccia $aZ = a$, si avrà $(A'')\ldots a^2 = 3 - 2\,\text{sen.}\,A\sqrt{2}$; comprendiamo sotto questa equazione anche il caso, che l'arco A sia negativo, cioè Bz, nel quale il segno $-$ prefisso a $2\,\text{sen.}\,A\sqrt{2}$ si cambia in $+$.

199. Il valore di a può sempre essere quello d'una qualche corda del cerchio BDd, fuori che nel caso, che la distanza az espressa per a superi il valore di 2. Per calcolare più facilmente il valore di a in questi casi, essendo $\sqrt{2} = BF = 2\,\text{sen.}\,45^\circ$, e $2\,\text{sen.}\,A\,\text{sen.}\,45^\circ = \cos.(A - 45^\circ) - \cos.(A + 45^\circ) = \cos.(45^\circ - A) - \text{sen.}(45^\circ - A)$ (§. 158.),

si avrà

$(*)\ a^2 = 3 - 2\cos.(45^\circ - A) + 2\,\mathrm{sen}.(45^\circ - A).$

200. Negli altri casi, nei quali a è minore di 2, chiamando A' quell'arco, del quale a è corda, si avrà $\frac{a^2}{4} = \mathrm{sen}.^2 \tfrac{1}{2} A' = \frac{1 - \cos. A'}{2}$ (§. 155.) $= \frac{3}{4} - \mathrm{sen}.\ A \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{3}{4} -$ sen. A . cos. 45°; quindi riducendo $\cos. A' =$ 2 sen. A . cos. 45° $- \tfrac{1}{2}$; quindi ancora (§. 156.)

$$\cos. A' = \mathrm{sen}.(A + 45^\circ) + \mathrm{sen}.(A - 45^\circ) - \mathrm{sen}.\ 30^\circ$$

ovvero

$$(1)\ \cos. A' = \cos.(45^\circ - A) - \mathrm{sen}.(45^\circ - A) - \mathrm{sen}.\ 30^\circ.$$

201. Se si vuole far servire questa equazione (1) alla divisione della circonferenza in quelle parti, che non si possono ottenere con precisione, si introdurrà in luogo di A un arco preciso, per esempio la ventesima parte della circonferenza $= 18^\circ$, supponendo $BZ = 18^\circ$,
Fig. 12. e si avrà $\cos. A' = \cos. 27^\circ - \mathrm{sen}. 27^\circ - \mathrm{sen}. 30^\circ$,

$$
\begin{aligned}
\text{Ora}\quad \mathrm{sen}.\ 27^\circ &= 0,4539905\\
\mathrm{sen}.\ 30^\circ &= \underline{0,5}\\
& \ 0,9539905\\
\cos.\ 27^\circ &= \underline{0,8910065}\\
\text{Quindi}\quad \cos. A' &= -0,0629840
\end{aligned}
$$

Si trova poi sulle tavole $0,0629840 =$ sen. $3^\circ\ 36'\ \frac{1935}{2903}$. Ora essendo $\frac{1935}{2903}$ così vicino

vicino al valore di $\frac{2}{1}$, che non v'è l'errore nemmeno d'una unità intera nell'ultima cifra del numero 1935, si potrà prendere 0,0629840 pel seno di $3^\circ\ 36'\ 40''$ senza poter decidere colle tavole comuni, se vi sia pure l'errore di un minuto terzo. Quindi l'arco A', che ha questo coseno negativo, sarà $= 93^\circ\ 36'\ 40''$, e di quest'arco sarà corda la distanza aZ posto BZ $= 18^\circ$. Applicando dunque la distanza aZ presa sul compasso per corda alla circonferenza, si determinerà un tal arco $= 93^\circ\ 36'\ 40''$, assai prossimamente.

202. Per indagare l'errore, che sfugge ai numeri delle tavole comuni, si consideri, che essendo il seno di 18° eguale alla metà della corda della decima parte della circonferenza, cioè $= \frac{1}{2}Ab = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, e il coseno di $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, l'equazione $\cos. A' = 2 \operatorname{sen.} A \cos. 45^\circ - \frac{1}{2}$ del §. 200. dà $\cos. A' = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{10} - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} = 0,062983982 4$. Calcolato poi con più cifre anche il seno di $3^\circ\ 36'\ 40''$, si trova $= 0,06298406 1154$. Attenendosi solamente a otto cifre decimali si trova sen. $3^\circ\ 36'\ 39'' = 0,0629792 1$. La differenza per $1''$, ossia per $60'''$ è 485. Se dunque 485 dà $60'''$, 8 darà $\frac{56}{97}'''$, non darà dunque un intero minuto terzo. Dunque l'arco, del quale è corda la distanza aZ, non è maggiore di $93^\circ\ 36'\ 40''$ di un intero minuto terzo.

203. Posto tutto ciò ecco l'uso, che si potrebbe fare di questo valore per la divisione antica
Fig. 12. del cerchio. Lasciamo stare, che potrebbe servire a dividere in tre un minuto primo in que' cerchj, dove fossero notati i minuti primi, poichè si troverebbero i 40", cioè i $\frac{2}{3}'$ tra un minuto primo, e l'altro seguente, e ciò senza l'errore di un minuto terzo; esso può anche servire a trovare la terza parte di un grado. Poichè essendo l'arco cBN = 90°, ed Np = 3° (§. 31. 43.), se preso BZ = Kp, nel qual caso riuscirà l'arco BZ = 18° (§. 32.), col raggio aZ fatto centro in c si descriverà un arco, esso taglierà la circonferenza tra p, e P in un punto distante da p di 36′ 40″ col piccolo errore calcolato. Si chiami y questo punto, e si triplichi per esempio l'arco Ny = 3° 36′ 40″. Avremo un arco = 10° 50′ senza l'errore di tre minuti terzi, e se questa triplicazione si è fatta da N verso G, caderà l'ultima divisione tra π, e ϕ. Si chiami $\varkappa$ il punto, dove esso cade, cosicchè sia N$\varkappa$ = 10° 50′. Si chiami poi μ il punto, che è alla metà dell'arco $\pi\phi$ ottenuto col §. 58. Sarà l'arco $\mu\varkappa$ = 20′ senza l'errore di tre minuti terzi, cioè si avrà ottenuto un terzo di grado antico con tanta precisione, ch'io non so, se abbiasi per la pratica a desiderarsene una maggiore.

204. Noi abbiamo tratto quest'esempio dalla lista di tutti i valori di cos. A' calcolati introducendo nell'equazione (1) in luogo di A successivamente $90°$, $88° 30'$, $87°$, e così in seguito fino a $0°$, quindi $-1° 30'$, $-3°$ ec. fino a $-19° 30'$ inclusivamente; oltre il qual caso non ha più luogo l'equazione (1) venendo i suoi valori maggiori di 1.

205. Ora proseguiremo a trovare le altre equazioni. Ogni distanza del punto b dai punti della circonferenza riuscendo minore del diametro 2 potrà essere corda di un arco. Quest' arco, di cui la bZ è corda si chiami B'; si avrà $\frac{bZ}{2} = \text{sen.}\frac{1}{2}B'$, e chiamando B l'arco BZ, si avrà $Zz = 2\,\text{sen.}\,B$, quindi dall'equazione (B) del §. 196. divisa per 4 risulterà $\text{sen.}^2\frac{1}{2}B' = \frac{1 - \cos. B'}{2}$ (§. 155.) $= \frac{5 - \sqrt{5}}{8} + \text{sen.}\,B \,.\, \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Quindi $\cos. B' = 1 - \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{4}\right) - \text{sen.}\,B\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1 - 2\,\text{sen.}^2\,36° - 2\,\text{sen.}\,B\,\text{sen.}\,18° = \cos. 72° - \cos.(B - 18°) + \cos.(B + 18°)$ (§. 155. 158.). Si avrà dunque

$$(2)\quad \cos. B' = \text{sen.}\,18° + \cos.(B + 18°) - \cos.(B - 18°).$$

206. Parimente se si chiami E' l'arco, del quale è corda la eZ, ed E l'arco BZ, si avrà dall' equazione (E) (§. 196.)

$$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} E' = \frac{1 - \cos. E'}{2} = \frac{3 - \sqrt{2}}{4} -$$

$$\text{sen. E} \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2}.$$ Quindi ne viene $\cos. E'$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} + 2 \,\text{sen. E} \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2} = \text{sen.}\, 45^\circ$$

$- \text{sen.}\, 30^\circ + 2 \,\text{sen. E sen.}\, 22^\circ\, 30'$. Quindi finalmente

$$(3) \quad \cos. E' = \text{sen.}\, 45^\circ - \text{sen.}\, 30^\circ + \cos(E - 22^\circ\, 30') - \cos.(E + 22^\circ\, 30').$$

207. Per via di queste tre equazioni coll' ajuto delle tavole dei seni, e dei coseni naturali dato un arco A, B, od E per via di semplici addizioni, o sottrazioni si avranno i coseni, e quindi gli archi A', B', ed E', dei quali riescono corde le distanze aZ, bZ, eZ, le quali esse stesse si conosceranno duplicando il seno della metà degli archi A', B', ed E'.

208. Reciprocamente se sia la distanza aZ eguale ad una corda d'un arco noto A', e si cerchi di che arco diventerà corda la Zz, ossia di quanti gradi riuscirà l'arco BZ, che ne è la metà, ed è $= A$; dall'equazione (§. 198.)

$$a^2 = 3 - 2 \,\text{sen. A} \sqrt{2}\ ,$$

si ricaverà $\text{sen. A} = \frac{3 - a^2}{2\sqrt{2}}$, e sostituendo il valore di $a^2 = 4\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} A' = 2 - 2\cos. A'$ (§. 155.), avremo $\text{sen.}\, A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} +$ $\cos. A' \sqrt{\frac{1}{2}} = \text{sen.}\, 30^\circ\, \text{sen.}\, 45^\circ + \cos. A'\, \text{sen.}\, 45^\circ$, e quindi (§. 156. 158.) essendo $\text{sen.}\,(45^\circ + A')$ $= \cos.\,(45^\circ - A')$

(4) . . $\text{sen.}\, A =$
$\frac{1}{2}[\text{sen.}\, 45^\circ + \text{sen.}\,(45^\circ - A') + \cos.\,(45^\circ - A')]$.

209. Istessamente se sia noto l'arco B', di cui è corda la distanza bZ, e si cerchi l'arco $B = BZ$ per via della Zz, che è corda di $2B$; moltiplicando l'equazione (B) (§. 196.) per $\sqrt{5} + 1$, per essere $(bB)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$, ed $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, avremo $(bZ)^2 . (\sqrt{5} + 1)$ $= 2\sqrt{5} + 4\,\text{sen.}\, B$, e sostituendo il valore di $(bZ)^2 = 4\,\text{sen.}^2 \frac{1}{2} B' = 2 - 2\cos. B'$ (§. 155.), si avrà dopo fatte le riduzioni $\text{sen.}\, B = \frac{1}{2} - 2\cos. B' \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)$. Ora essendo Bb il lato del pentagono $=$ $\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)}$ corda di 72°, sarà $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)} = \text{sen.}\, 36^\circ$. Quindi $\frac{1}{4} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = \text{sen.}^2\, 36^\circ$; quindi $1 - \text{sen.}^2\, 36^\circ$ $= \cos.^2\, 36^\circ = \text{sen.}^2\, 54^\circ = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} =$

$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$; quindi risulterà sen. $B = \frac{1}{2} -$ $2\cos. B'$ sen. $54°$, e finalmente (§. 156.)

$$(5)\ \text{sen.}\ B = \text{sen.}\ 30° - \text{sen.}(54° + B') - \text{sen.}(54° - B').$$

210. Nella stessa maniera se sia noto l'arco E', di cui è corda la distanza eZ, e si cerchi il grado dell'arco $BZ = E$, eguale alla metà dell'arco, di cui è corda $Zz = 2$ sen. E, sostituendo nell'equazione (E) (§. 196.) il valore di $(eZ)^2 = 2 - 2\cos. E'$, e gli altri valori di $(eB)^2 = 3 - \sqrt{2}$; $Ae = \sqrt{(2 - \sqrt{2})} = 2$ sen. $22° 30'$ (§. 198. 38.), avremo

2 sen. $E\sqrt{(2 - \sqrt{2})} = 2\cos. E' + 1 - \sqrt{2}$, e moltiplicando per $\sqrt{(2 + \sqrt{2})}\sqrt{2}$, ne verrà 4 sen. $E = 2\cos. E'\sqrt{(2 + \sqrt{2})}\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})} = 2\cos. E'\sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2} - (2 - \sqrt{2})\sqrt{(2+\sqrt{2})} = 2\cos. E'\sqrt{(2 + \sqrt{2})}\sqrt{2} - \sqrt{(2 - \sqrt{2})}\sqrt{2}$, e dividendo per 4, e considerando, che è $\sqrt{(2 + \sqrt{2})} = 2$ sen. $67° 30'$ (§. 37.), $\sqrt{2} = 2$ sen. $45°$, si avrà (§. 156. 157. 158.) sen. $E = 2\cos. E'$ sen. $67° 30'$ sen. $45° -$ sen. $22° 30'$ sen. $45°$; ossia sen. $E =$ $\cos. E'[\cos.(67° 30' - 45°) - \cos.(67° 30' + 45°)]$ $-$ sen. $22° 30'$. sen. $45°$, ossia sen. $E =$ $\cos. E' \cos. 22° 30' + \cos. E'$ sen. $22° 30'$ $-$ sen. $22° 30'$ sen. $45°$.

ossia finalmente

$$(6)\ \text{sen.}\ E = \tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} \cos.\,(E' + 22^\circ\ 30') \\ + \text{sen.}\,(E' + 22^\circ\ 30') \\ + \text{sen.}\ \ 22^\circ\ 30' \\ + \cos.\,(E' - 22^\circ\ 30') \\ - \text{sen.}\,(E' - 22^\circ\ 30') \\ - \cos.\ \ 22^\circ\ 30' \end{array}\right\}$$

211. Così dalle tre equazioni (A), (B), ed (E) ne abbiamo ricavate sei, per mezzo delle quali da archi dati possiamo ricavare nuovi archi coll'ajuto dei soli tre punti *a*, *b*, ed *c*, e insieme le nuove loro corde.

212. Potendo essere infiniti gli archi dati, sono ancora infiniti i casi di ciascuna di queste equazioni. Ma se non si vogliamo prevalere che degli archi, che si possono trovare per mezzo degli stessi tre punti *a*, *b*, ed *c*, essi sarebbero 120 per ogni equazione, quando per alcuna di esse non vi fossero alcuni limiti particolari. Diffatti potendosi per via di quei tre punti dividere la circonferenza in 240 parti eguali (§. 57.), e per conseguenza la semicirconferenza in 120, saranno 60 i punti Z, e 60 i z, che presi insieme determinerebbero 120 casi per ogni equazione. Ma alcuna di esse avrà dei limiti particolari.

213. Per esempio s'io volessi prendere sul compasso la corda di 3°, cioè della centoventesima parte della circonferenza (§. 42.), e collo-

cando la punta del compasso in a segnare u arco, esso non potrebbe tagliare la circonfe renza in alcun punto Z, essendo questa cord minore della distanza $aF = \sqrt{2} - 1$. No si potrà dunque nell'equazione (4) introdurr in luogo di A′ l'arco di 3°, e se ciò si vo lesse fare, ne verrebbe un valore maggior dell' unità, cioè assurdo per sen. A. Per ve dere, quale sia il primo arco, che si potr introdurre in luogo di A′ tra gli archi dell serie 1° 30′, 3°, 4° 30′ ec., si osservi d che arco sia corda la distanza aF, che è l minima del punto a dal cerchio, ed è $=$

$$\sqrt{2} - 1 = 2\,\text{sen.}\,45° - \tfrac{1}{2} = 0,9142135\ldots$$
$$= \cos.\,23°\,54' + .$$

Dunque il primo arco, che si possa adoperar di quelli, che si trovano per via dei tre punt a, b, ed e, sarà l'arco di 24°. Dietro a esso poi si potranno adoperare tutti gli altr in serie 25° 30′, 27°, 29° 30′ ec. fino a 180°; poichè le corde di tutti questi posson essere distanze dal punto a da qualche punt Z, ovvero z della circonferenza.

214. Più limitate sono le equazioni (5), e (6). Poichè nella (5) non si ponno impiegare archi B′, che abbiano la corda minore di bf, nè maggiore di bF; egualmente nella (6) sono esclusi tutti gli archi E′ di corda minore di eF, e maggiore di ef.

215. Vedremo in seguito i casi, nei quali rie-

scono utili alcuni di questi valori per la divisione del cerchio, o per qualche altro Problema, che non si possa sciogliere se non per approssimazione, scegliendo quelli da tutta la lista calcolata, che danno maggior avvicinamento al vero valore, che si cerca, e nello stesso tempo si sciolgono con sezioni di archi meno lontane dall' angolo retto.

216. Intanto per ottenere tutti i vantaggi possibili dai tre punti a, b, ed e senza introdurre punti nuovi, ricaveremo dalle tre equazioni (A), (B), ed (E) altre sei equazioni per avere nuovi valori di archi, e di corde.

217. Se sia l'arco BZ un arco conosciuto, per esempio uno di quelli, che si ottengono coi Problemi del Secondo Libro, e si chiami B; e si prenda la distanza bZ sul compasso, e si porti da a a qualche altro punto Z', che determini un altro arco $BZ' = A$, si può ricavare dal confronto delle due equazioni (A), e (B) una nuova equazione, che lo faccia conoscere. Poichè se in quelle due equazioni si farà $bZ = aZ'$; facendo nella (A) $Zz = 2\,\text{sen.}\,A$, e nella (B) $Zz = 2\,\text{sen.}\,B$, si avrà $(aB)^2 - 2\,\text{sen.}\,A \,.\, Aa = (bB)^2 + 2\,\text{sen.}\,B \,.\, Ab$, ossia $3 - 2\,\text{sen.}\,A\sqrt{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ $+ \text{sen.}\,B(\sqrt{5} - 1)$ (§. 198.), e liberando sen. A, avremo $\text{sen.}\,A = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}} -$

$$2\,\text{sen.}\,B\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \text{sen.}\,54^\circ\,.\,\text{sen.}\,45^\circ$$

$$-\,2\,\text{sen.}\,B\,\text{sen.}\,18^\circ\,.\,\text{sen.}\,45^\circ.$$

(§. 209.) $= \frac{1}{2}(\cos.\,9^\circ + \text{sen.}\,9^\circ)$
$-$ sen. B (cos. $27^\circ -$ sen. 27°) (§. 158.); quindi (§. 155. e segg.)

$$(7)\ \text{sen.}\,A = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \cos.\,9^\circ + \text{sen.}\,9^\circ \\ + \cos.\,(B - 27^\circ) \\ - \text{sen.}\,(B - 27^\circ) \\ - \cos\,(B - 63^\circ) \\ + \text{sen.}\,(B - 63^\circ) \end{array}\right\}$$

218. Anche quì per B non si potranno prendere tutti gli archi, ma solamente quelli, che diano una distanza bZ, ovvero bz non minore di aF.

219. Ora se sia conosciuto un arco BZ, che si chiami A, e presa sul compasso la distanza aZ si porti essa da b a qualche punto Z' della stessa circonferenza, che determini l'arco $BZ' = B$; si conoscerà quest'arco B, e la sua corda, se occorra, se nell'equazione sen. A

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\,\text{sen.}\,B\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{4}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

(§. 217) si libererà sen. B. Si moltiplichi essa equazione pel fattore $2(\sqrt{5}+1)\sqrt{2}$, ed avremo $2\,\text{sen.}\,A(\sqrt{5}+1)\sqrt{2} = 3 + \sqrt{5}$

$-\,4\,\text{sen.}\,B$; onde avremo $\text{sen.}\,B = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$

$$-\,4\,\text{sen.}\,A\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2\,\text{sen.}^2\,54^\circ -$$

$4\,\text{sen.}\,A\,\text{sen.}\,54^\circ.\,\text{sen.}\,45^\circ$ (§. 209.), e adoperate come sopra le equazioni de' §§. 155. e segg., risulterà in fine

(8) $\text{sen.}\,B = 1 + \text{sen.}\,18^\circ - \text{sen.}\,(A + 9^\circ) + \cos.\,(A + 9^\circ) - \text{sen.}\,(A - 9^\circ) - \cos.\,(A - 9^\circ)$.

220. In questa equazione (8) non si potranno impiegare per A quegli archi BZ, che danno una distanza aZ maggiore di bF.

221. Ora se nell' equazione (A) (§. 196.) si faccia $Zz = 2\,\text{sen.}\,A$, e nell' equazione (E) un' altra $Zz = 2\,\text{sen.}\,E$; facendo inoltre in queste due equazioni $(aZ)^2 = (eZ)^2$, si avrà dopo le sostituzioni dei valori (§. 198.)

$3 - 2\,\text{sen.}\,A\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} - 2\,\text{sen.}\,E\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$;

$$\text{sen.}\,A = \tfrac{1}{2} + 2\,\text{sen.}\,E\,\frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$= \frac{1}{2} + 2\,\text{sen.}\,E\,\text{sen.}\,22^\circ\,30'\,\text{sen.}\,45^\circ = \frac{1}{2} + \text{sen.}\,E\cos.\,22^\circ\,30' - \text{sen.}\,E\,\text{sen.}\,22^\circ\,30'$ (§. 158.).

Quindi finalmente (§. 156. 158.)

$$(9)\quad \text{sen.}\,A = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} +\,\text{sen.}\,(E + 22^\circ\,30') \\ +\,\cos.\,(E + 22^\circ\,30') \\ +\,\text{sen.}\,(E - 22^\circ\,30') \\ -\,\cos.\,(E - 22^\circ\,30') \end{array}\right\}$$

222. Quest' equazione nona si può anche preparare in altro modo, perchè il calcolo riesca più facile per mezzo de' seni, e coseni artificiali, i quali si sogliono trovare nelle tavole più facilmente di dieci in dieci secondi. Perchè essendo (§. 221.)

$$\text{sen. }A = \tfrac{1}{2} + 2\text{ sen. }E\,\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}} + \text{sen. }E\right)\frac{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}}{2} =$$

$$\left(\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} + \text{sen. }E\right)\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2} : \sqrt{\tfrac{1}{2}} =$$

$$(\text{sen. }67^\circ 30' + \text{sen. }E)\,\frac{\text{sen. }22^\circ 30'}{\text{sen. }45^\circ}\ (\S.\ 37.).$$

E facendo $67^\circ 30' = p$; $E = q$; si avrà (§. 156.)

$$[9]\ \text{sen. }A = \frac{\text{sen. }\dfrac{67^\circ 30' + E}{2}\ \text{cos. }\dfrac{67^\circ 30' - E}{2}}{\text{cos. }22^\circ 30'}$$

La quale equazione sarà facile da calcolare per via de' logaritmi de' seni, e de' coseni.

223\. Se dunque prenderemo sul compasso una distanza del punto e da qualche punto Z estremo di un arco conosciuto BZ $=$ E, e la porteremo da a a qualche altro punto Z' della circonferenza; conosceremo il nuovo arco BZ' $=$ A per via dell'equazione (9), ovvero della [9]. Queste avranno i loro limiti, poichè l'arco BZ dovrà essere tale, che non si abbia eZ minore di aF.

224\. Avendosi dal §. 221. $2\text{ sen. }A\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\text{ sen. }E.\sqrt{(2-\sqrt{2})}$; e si moltiplichi questa equazione per $\dfrac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$, avremo

$$2\,\text{sen.}\,A\sqrt{(2+\sqrt{2})} = \sqrt{(2+\sqrt{2})} + 2\,\text{sen.}\,E,$$

e quindi $\text{sen.}\,E = 2\,\text{sen.}\,A\,\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} = 2\,\text{sen.}\,A\,.\,\text{sen.}\,67^\circ\,30' -$ $\text{sen.}\,67^\circ\,30'$ (§. 37.); quindi (§. 158.)

$$(10)\,\text{sen.}\,E = \cos.(A - 67^\circ 30') - \cos.(A + 67^\circ 30') - \text{sen.}\,67^\circ\,30.$$

225. Anche questa equazione decima si può preparare diversamente ad uso de' logaritmi. Poichè essendo $\text{sen.}\,E = (\text{sen.}\,A - \tfrac{1}{2})\,2\,\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} = (\text{sen.}\,A + \text{sen.} - 30^\circ)\,2\,\text{sen.}\,67^\circ\,30'$, facendo $A = p$; $-30^\circ = q$ si avrà (§. 156.)

$$[10]\ \text{sen.}\,E = 4\,\text{sen.}\,\frac{A - 30^\circ}{2}\,\cos.\,\frac{A + 30^\circ}{2}\,\text{sen.}\,67^\circ\,30'.$$

226. E' chiaro, che tutti i valori dell'arco BZ, ovvero $Bz = \pm A$, che daranno aZ maggiore di ef, non si potranno introdurre nell' equazione decima, che quindi riceverà i suoi limiti.

227. Finalmente due altre equazioni ottenere si possono dal confronto dell'equazione (B) colla (E). Poichè se si piglia una distanza da e a qualche punto Z della circonferenza, che sia l'estremo d' un arco conosciuto $BZ = E$, e con questa distanza eZ presa per raggio, e fatto centro in b si segni un arco, che tagli

la circonferenza in qualche altro punto Z', che determini l'arco $BZ' = B$; si conoscerà quest'arco per via del suo seno nel modo seguente. Fatto nell'equazione (B) (§. 196.) $Zz = 2\,\text{sen.}\,B$, e nell'equazione (E) $Zz = 2\,\text{sen.}\,E$, e fatto in esse $bZ = eZ$, si avrà dopo la sostituzione dei valori (§. 198.) $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} + \text{sen.}\,B(\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{2} - 2\,\text{sen.}\,E \,.\, \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$; donde si ricava $2\,\text{sen.}\,B(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{2} - 4\,\text{sen.}\,E \,.\, \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$; e moltiplicando da tutte due le parti per $\frac{\sqrt{5} + 1}{8}$, avremo $\text{sen.}\,B = \frac{3 + \sqrt{5}}{4} - \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} \,.\, \sqrt{\tfrac{1}{2}} - 4\,\text{sen.}\,E \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})}}{2} \,.\, \frac{(\sqrt{5} + 1)}{4} = 2\,\text{sen.}^2\,54^\circ - 2\,\text{sen.}\,54^\circ\,\text{sen.}\,45^\circ - 4\,\text{sen.}\,E \,.\, \text{sen.}\,22^\circ\,30'\,\text{sen.}\,54^\circ$. (§. 209.); e quindi (§. 158.) $\text{sen.}\,B = 1 - \cos.\,108^\circ - \cos.\,9^\circ - \text{sen.}\,9^\circ - 2\,\text{sen.}\,E(\cos.\,31^\circ\,30' - \cos.\,76^\circ\,30')$, e quindi (§. 156.)

(11) $\text{sen.}\,B = 1 + \text{sen.}\,18^\circ - \cos.\,9^\circ - \text{sen.}\,9^\circ - \text{sen.}\,(E + 31^\circ\,30') - \text{sen.}\,(E - 31^\circ\,30') + \text{sen.}\,(E + 76^\circ\,30') + \text{sen.}\,(E - 76^\circ\,30')$

228. Anche quest'equazione (11) avrà limiti da due capi. Poichè la distanza minima $eF = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$ è minore della di-

stanza $bf = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, e la massima ef è maggiore della bF.

229. Se l'equazione $2\,\text{sen.}\,B(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1 - 2\sqrt{2} - 4\,\text{sen.}\,E\,.\,\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ trovata quì sopra §. 227. si moltiplichi per $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4\sqrt{2}}$, si avrà $\text{sen.}\,E = 2\,\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}\,.\,\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ $- \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2} - 4\,\text{sen.}\,B\,.\,\frac{(\sqrt{5}-1)}{4} \times \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2\,\text{sen.}\,54^\circ\,.\,\text{sen.}\,67^\circ\,30' \times \text{sen.}\,45^\circ - \text{sen.}\,67^\circ\,30' - 4\,\text{sen.}\,B\,.\,\text{sen.}\,18^\circ \times \text{sen.}\,67^\circ\,30'\,.\,\text{sen.}\,45^\circ = \text{sen.}\,67^\circ\,30'(\cos.\,9^\circ + \text{sen.}\,9^\circ) - \text{sen.}\,67^\circ\,30' - 2\,\text{sen.}\,B \times \text{sen.}\,67^\circ\,30'\,(\cos.\,27^\circ - \text{sen.}\,27^\circ) = \frac{1}{2}(\text{sen.}\,76^\circ\,30' - \cos.\,76^\circ\,30' + \text{sen.}\,58^\circ\,30' + \cos.\,58^\circ\,30') - \text{sen.}\,67^\circ\,30' - \text{sen.}\,B(\text{sen.}\,85^\circ\,30' + \text{sen.}\,40^\circ\,30' - \cos.\,40^\circ\,30' - \cos.\,85^\circ\,30')$; donde si ha finalmente

$$(12)\quad \text{sen.}\,E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\text{sen.}\,76^\circ\,30' - \cos.\,76^\circ\,30' \\ +\,\text{sen.}\,58^\circ\,30' + \cos.\,58^\circ\,30'\end{pmatrix} - \text{sen.}\,67^\circ\,30'$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\cos.(85^\circ\,30' - B) + \text{sen.}(85^\circ\,30' - B) \\ -\cos.(85^\circ\,30' + B) - \text{sen.}(85^\circ\,30' + B) \\ +\cos.(40^\circ\,30' - B) + \text{sen.}(40^\circ\,30' - B) \\ -\cos.(40^\circ\,30' + B) - \text{sen.}(40^\circ\,30' + B)\end{array}\right\}$$

La quale equazione non ha limiti.

230. Se per accidente qualcuno dei valori, che si

trovano con queste dodici equazioni, si trovi a prima giunta prossimo a qualche valore utile, e cercato nella Soluzione de' Problemi; avremo il vantaggio di arrivare all'intento per una via semplicissima. Poichè non si avranno ad impiegare altri punti presi fuori della circonferenza, che i soli tre già rimarcati tante volte *a*, *b*, ed *c*, e nella circonferenza qualcuno di quelli, che servono alla divisione esatta della circonferenza per via delle Soluzioni dei Problemi del Libro Secondo. Passiamo dunque oramai a darne varj esempj.

231. E prima vedremo come si possa dividere il cerchio alla maniera antica in gradi e minuti, senza l'errore di secondi. Per far questo supporremo, che Fig. 12. la circonferenza del cerchio BD*d* sia divisa in dugento quaranta parti (§. 57. 58.), ciascuna delle quali come la $P'\delta$ contiene 1° 30′, e che la numerazione positiva cominci da B verso F, e una simile numerazione negativa vada da B verso *f*, e sieno i punti Z, e Z′ punti vaghi, che non hanno per ora altra condizione, se non che si trovano tra B, ed F sulla circonferenza; e istessamente i punti *z*, e *z*′ tra B, ed *f*. Questo lo facciamo a scanso delle troppe

Figure

Figure, che bisognerebbero se se ne replicasse una ad ogni Problema. Inoltre la minutezza delle divisioni appena le lascerebbe scorgere anche in Figure molto maggiori della Fig. 12.

PROBLEMA.

232. **T**rovare l'arco d'un grado antico, ossia di 1° senza l'errore di mezzo secondo.
Fig. 12.

Soluzione I. Sia l'arco $Bz = -55° \; 30'$ (§. 231.). Si prenda sul compasso la distanza bz, e fatto centro in e si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto Z. Sarà l'arco $BZ = 52° \; 59' \frac{1739}{1751}$, cioè di 53°, senza che vi manchino venticinque minuti terzi. Si ha poi nelle divisioni da B verso F eseguite col Problema §. 42. l'arco di $54° = \frac{18}{120}$. Si avrà dunque anche l'arco $54° - 53° = 1°$ colla approssimazione, che si voleva.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) si faccia $B = -55^\circ\, 30'$, risulta in fine del calcolo

$$\text{sen.}\, E = 0,7986343 = \text{sen.}\, 52^\circ\, 59' \frac{1739}{1751}.$$

Soluzione II. Sia l'arco $BZ = 10^\circ\, 30'$. Colla distanza bZ presa per raggio, e col centro a si descriva un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto Z'. Sarà l'arco $BZ' = 29^\circ\, 29' \frac{2511}{2532}$, cioè $= 29^\circ\, 30'$ senza l'errore di mezzo secondo. Si trova poi nelle divisioni del §. 58. l'arco di $28^\circ\, 30' = \frac{19}{240}$ della circonferenza. Dunque si avrà la differenza de' due archi eguale a 1° coll'approssimazione voluta.

Dimostrazione. Se nell'equazione (7) si ponga $B = 10^\circ\, 30'$, risulterà in fine del calcolo

$$\text{sen.}\, A = 0,4924215 = \text{sen.}\, 29^\circ\, 29' \frac{2511}{2532}.$$

Mancherà dunque la differenza degli archi dal valore di un grado di $29'''$.

233. Questa seconda Soluzione è meno prossima della prima di 5 minuti terzi, ma le sezioni degli archi si fanno in questa ad un angolo più vicino al retto.

234. Avendosi l'arco di 1° 30′ (§. 225.), ed essendosi trovato l'arco di 1° (§. 226.), si avrà per sottrazione anche l'arco di 30′, ossia il mezzo grado, e quindi si avrà modo di dividere tutta la circonferenza in mezzi gradi senza accumulare errori, e senza che alcun punto sia lontano dal suo vero sito di mezzo secondo.

PROBLEMA.

235. Trovare l'arco di un quarto di grado, ossia di 15′, senza l'errore di un minuto terzo.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -12°$, la distanza ez sarà eguale alla corda di 87° 15′. Se dunque si piglierà sul compasso, e fatto centro in B si taglierà l'arco BF in un punto Z′, sarà l'arco BZ′ = 87° 15′. Si ha poi dalle divisioni del §. 42. l'arco di $87° = \frac{29}{120}$ della circonferenza. Si avrà dunque la differenza de' due archi = 15′.

Dimostrazione. Se nell'equazione (3) (§. 206.)

$$\cos. E' = \text{sen.}\, 45° - \text{sen.}\, 30° + \cos.(E - 22° 30') - \cos.(E + 22° 30')$$

si ponga $E = -12^{\circ}$, si avrà

$$\text{sen. } 45^{\circ} - \text{sen. } 30' = 0,2071068$$
$$\cos. -34^{\circ}\,30' = 0,8241262$$
$$-\cos. 10^{\circ}\,30' = \underline{-1 + 0167451}$$
$$\cos. E' = 0,0479781$$

Ora nelle tavole, che danno i seni naturali con sette cifre, si trova $0,0479781 = \cos. 87^{\circ}\,15'$ senza alcuna varietà nemmeno nell'ultima cifra. Impiegando poi più decimali si trova

$$\cos. E' = 0,0479780622$$
$$\cos. 87^{\circ}\,15' = 0,0479781285\,20$$

Impiegando sole otto cifre decimali si ha

$$\cos. 87^{\circ}\,15'\,1'' = 0,04797229$$

Si ha dunque per $1''$ la differenza 584. Se 584 dà di differenza $60'''$, 7 darà $\frac{105}{146}$ di minuto terzo. Sarà dunque l'arco E', del quale è corda la eZ', di $87^{\circ}\,15'$ con una mancanza minore di un minuto terzo.

236. Si potrà per mezzo di questo Problema dividere la circonferenza in 1440 parti, cioè in tanti quarti di grado, senzachè vi sia in alcun punto di divisione l'errore di tre minuti terzi. Poichè fatte sopra ogni arco $P\delta$ di $1^{\circ}\,30'$ tre divisioni di $15'$ in $15'$ da P verso δ, e due da δ verso P, resterà l'arco

P A diviso in sei parti, ciascuna delle quali sarà di un quarto di grado senza l'errore indicato nella posizione di alcun punto di divisione. Così nel resto della circonferenza. Quindi innanzi supporremo la circonferenza divisa in gradi, e quarti, che per semplicità del calcolo supporremo esatti. Si potrà tener conto dei loro errori, qualor si voglia.

PROBLEMA.

237. Trovare un arco di 10', ossia la sesta parte d'un grado senza l'errore di 10''', ossia della sesta parte d'un secondo.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -49° 30'$; sarà la distanza bz eguale alla corda dell' arco $38° 50'$, senza l'errore indicato. Sottraendo poi l'arco $38° 50'$ dall' arco $39° = \frac{13}{120}$ della circonferenza, che si ha col §. 42., rimarrà l'arco di 10'.

Dimostrazione. Se nell' equazione (2) si porrà $B = -49° 30'$, ne verrà $\cos. B' = 0,7789738$ $= \cos. 38° 49' \frac{1819}{1824}$. Si ha dunque $B' = 38° 50'$ col difetto di 9'''.

238. Sottraendo da un arco di $50'$ mancante di $9'''$ un arco di $45'$ (§. 236.) mancante di qualche minuto terzo, si avrà l'arco di $5'$, ossia la dodicesima parte del grado senza l'errore di $9'''$.

PROBLEMA.

239. Trovare l'arco di $6'$, ossia un decimo di grado senza l'errore di $13'''$.

Soluzione. Sia l'arco $BZ = 45°$, cioè sia l'arco BG. Si prenda sul compasso la distanza BG, e fatto centro in *b* si tagli la circonferenza in *z*. Sarà l'arco $Bz = -40° \, 6'$, senza l'errore indicato. Sottraendo l'arco di $-40°$ (§. 236.), resterà l'arco di $6'$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (5) si ponga $B' = 45°$; ne verrà sen. $B = -0{,}6441228 =$ sen. $-40° \, 5' \dfrac{2217}{2225}$. Sarà dunque l'arco $B = Bz = -40° \, 6'$ col difetto di $12'''$.

240. Sottraendo dall'arco di $6'$ (§. 239.) l'arco di $5'$ (§. 238.), rimarrà l'arco di $1'$ coll'errore di pochi minuti terzi. Ma si può trovare quest'arco immediatamente col seguente

PROBLEMA.

241. Trovare immediatamente l'arco di 1′ senza l'errore di 22 minuti terzi.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -27°$. Si prenda sul compasso la distanza bz come raggio, e fatto centro in e si tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco BZ $= 29° \, 59'$ coll'eccesso di 10 minuti terzi. Essendo dunque l'arco BN $= 30°$ (§. 31.), sarà l'arco ZN $= 1'$ mancante di $10'''$.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) si ponga $B = -27°$, si avrà sen. $E = 0,4997496$ $=$ sen. $29° \, 59' \, \frac{15}{2567}$. Dunque ec.

PROBLEMA.

242. Trovare l'arco di 9′ senza l'errore di 7 minuti terzi.

Soluzione. Colla distanza bK presa per raggio, e col centro e si segni un arco, che tagli la circonferenza in z. Sarà l'arco $Bz = -4° \, 21'$ coll'eccesso di 6 minuti terzi, che sottratto da $-4° 30'$ lascia $9'$ senza l'errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) si faccia $B = 15° = BK$ (§. 32.), si avrà sen. $E =$

$$-0,0758494 = \text{sen.} -4° 21' \frac{5}{2901}.$$ Sarà

dunque l'arco $Bz = -4° 21' 0'' 6'''$.

Questo Problema servirà ancora alla nuova divisione del cerchio, come vedremo (§. 256.).

243. L'arco di $15'$ mancante meno di un minuto terzo (§. 235.), quello di $10'$ crescente meno di $10'''$ (§. 237.), quello di $6'$ mancante meno di $13'''$ (§. 239.), quello di $1'$ mancante meno di $22'''$ (§. 241.), quello di $9'$ mancante meno di $7'''$ (§. 242.) si potranno combinare in modo per addizione, o sottrazione senza accumulare molto gli errori, che in fine risulti tutta la circonferenza divisa in gradi, e minuti primi senza l'errore che di pochissimi minuti terzi. Poichè raddoppiando per esempio l'arco di $9'$, avremo un arco di $18'$ mancante meno di $14'''$, dal quale sottraendo l'arco di $6'$ mancante meno di $13'''$ avremo l'arco di $12'$ mancante di circa un minuto

terzo. Sottraendo ora quest' arco dall' arco di $15'$ mancante meno di $1'''$ (§. 235.), avremo l'arco di $3'$ coll' errore di un minuto terzo appena. Con questo si potrà dividere in cinque parti ogni arco di $15'$, e resterà divisa tutta la circonferenza di tre in tre minuti primi coll' errore minore di sei minuti terzi per conto di quest' ultima divisione, il quale errore, se si porrà sul verso contrario all' errore di tre minuti terzi al più, che si commette nella divisione di $15'$ in $15'$ (§. 235.), diverrà anche minore. Quindi impiegando l' arco di $1'$ mancante meno di $4'''$ (§. 240.) a dividere ogni arco di $3'$, non si verrà mai a commettere un errore di $10'''$, e si avrà divisa tutta la circonferenza in gradi, e minuti primi.

Si potrebbero anche combinare questi, o altri archi cavati dalle dodici equazioni superiori, in guisa che si venisse a commettere minore errore, e noi impieghe- remmo in questo alquanti Problemi, se per una parte questa divisione del cerchio in 360° non dovesse antiquarsi, e se per l' altra credessimo, che gli artefici, che ancora la volessero usare, trovassero opportune per la pratica tali ricerche. Non vogliamo però ommettere i seguenti Problemi, supponendo adesso, che si sia diviso il cerchio intero in gradi antichi, e minuti, che per semplicità supporremo esatti.

PROBLEMA.

244. Trovare l'arco di 20″, ossia un terzo di minuto crescente di 1‴ appena.

Soluzione I. Pel §. 201. si trova l'arco di 40″ crescente meno di un minuto terzo. Quindi anche l'arco di 20″ complemento al 1′ mancante meno di un minuto terzo.

Soluzione II. Presa sul compasso la corda dell'arco 61° 30′ come raggio, e fatto centro in *e* si descrive un arco, che tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco BZ = 20° 39′ 40″ crescente di un minuto terzo appena. Quindi sottraendo quest' arco dall'arco 20° 40′, si avrà l'arco di 20′ mancante appena di 1‴.

Dimostrazione. Se nell' equazione (6) si ponga $E' = 61^\circ\ 30'$, adoperando tavole più copiose di seni, si avrà sen. $BZ =$

sen. $E = 0,35283991$; si ha poi

sen. $20^\circ\ 39'\ 40'' = 0,35283984$

Ora log. $0,3528399 = 9 \cdot 5475777$

log. sen. $20^\circ\ 39'\ 40'' = 9 \cdot 5475776$

log. sen. $20^\circ\ 39'\ 50'' = 9 \cdot 5476334$

differenza $= 558$

Dunque E crescerà sopra l' arco $20^\circ 39' 40''$ di $\frac{10''}{558}$ circa, cioè di $1'''$ e poco più.

PROBLEMA.

245. Trovare l' arco di $15''$, ossia un quarto di minuto mancante di $10'''$ circa.

Soluzione. Si prenda per raggio sul compasso la corda di $31^\circ\ 30'$, e fatto centro in *e* si tagli la circonferenza in un punto Z. Sarà l' arco $BZ = 57^\circ\ 30'\ 15''$ mancante di $9'''$.

Dimostrazione. Se nell' equazione (6) s' introduca $E' = 31^\circ\ 30'$, si troverà $E = 57^\circ\ 30' \frac{386}{1563}$

Ma si ha $\frac{390}{1563} = \frac{1}{4}$. Dunque la mancanza è di $\frac{4}{1563}$ circa, cioè di $10'''$ circa.

PROBLEMA.

246. Trovare l'arco di $12''$, ossia un quinto di minuto mancante di $1'''$ circa.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -10^\circ\ 30'$. Presa sul compasso per raggio la distanza bz, e fatto centro in a si tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco $BZ = 40^\circ\ 40'\ 12''$ colla mancanza di $1'''$ circa.

Dimostrazione. Se nell'equazione (7) si ponga $B = -10^\circ\ 30'$, risulterà dal calcolo $A = 40^\circ\ 40'\ \frac{440}{2206}$. Ora si ha $\frac{441}{2206} = \frac{1}{5}$. Si ha dunque la mancanza di $\frac{1}{2206}$ cioè di $1'''$ circa. Se si calcolasse con tavole più copiose, si rileverebbe più precisamente l'errore.

PROBLEMA.

247. Trovare l'arco di $10''$, ossia di un sesto di minuto primo crescente di $1'''$ circa.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -24^\circ$. Presa sul compasso per raggio la distanza ez, e fatto centro in a si segni un arco, che tagli la circonferenza in Z. Sarà l'arco BZ $= 16° \, 15' \, 10''$ coll'errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione [9] si ponga $E = -24°$, ne verrà per risultato log. sen. $A = 9 . 4469652$. Questo si trova essere logaritmo del seno di $16° \, 15' \, 10'' \frac{20}{722}$. L'eccesso dunque non arriva a due minuti terzi.

PROBLEMA.

248. Trovare l'arco di $5''$, ossia d'una duodecima di minuto primo senza l'errore sensibile alle tavole comuni, e minore di $2'''$.

Soluzione I. Sia l'arco $BZ = 4° \, 30'$. Si prenda sul compasso per raggio la distanza eZ, e fatto centro in a si segni un arco, che tagli la circonferenza in un altro punto Z'. Sarà l'arco $BZ' = 32° \, 51' \, 5''$ senza l'errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione [9] si ponga $E = 4° \, 30'$, risulterà log. sen. $A = 9 . 7341692$;

ora log. sen. $32^\circ\ 51' = 9 . 7343529$; e la differenza è 163; la differenza poi nelle tavole per dieci minuti è 326 doppia in punto di 163. Dunque ec.

Calcolato l'errore con tavole più copiose risulta minore di $2'''$.

Soluzione II. Sia l'arco $BZ = 31^\circ\ 30'$. Si prenda sul compasso per raggio la distanza eZ, e col centro a si tagli la circonferenza in un altro punto Z'. Sarà l'arco $BZ' = 51^\circ\ 30'\ 55''$ col difetto minore di un minuto terzo.

Dimostrazione. Se nell'equazione [9] si ponga $E = 31^\circ\ 30'$, risulterà per via delle tavole comuni log. sen. $A = 9 . 8936365 =$ log. sen. $51^\circ\ 30'\ 50''\ \frac{86}{167}$. Il qual rotto $\frac{86}{167}$ riferendosi a $10''$ darà $5''$ coll'eccesso minore di $1'''$. Sarà dunque $A = 51^\circ\ 30'\ 55''$, il qual arco sottratto da $51^\circ\ 31'$ lascerà $5''$ col difetto indicato.

Ma è tempo di passare a dimostrare qual uso si possa fare delle dodici equazioni poste sopra volendo dividere la circonferenza del cerchio alla nuova maniera de' Francesi.

249. Secondo questa maniera la circonferenza vien divisa in 400 gradi, acciocchè il quadrante, che è fondamento di tutta

la trigonometria resti diviso in 100 gradi. Ogni grado vien diviso in 100 minuti primi, ogni minuto primo in 100 secondi, e così via via. La natura delle decimali dispensa, se un vuole, dal nominar gradi, minuti, o secondi, intendendosi abbastanza la natura del rotto dal posto delle decimali.

250. Quindi ne viene, che nove gradi antichi vagliono 10 gradi moderni, ossia è $9^\circ = 0,10$, che $54' = 0,01$; che $27' = 0\ 005$; che $5'\,24'' = 0,001$; che $32''\,24''' = 0,0001$; cioè che un grado moderno vale 54 minuti primi antichi, che un minuto moderno vale $32''\,24'''$ dell' antica divisione, ec.

251. Le divisioni accurate ottenute per via dei tre punti *a*, *b*, ed *e* nel Secondo Libro danno fino ad una 240esima della circonferenza (§. 59). L'arco, che la forma, è nella divisione antica di $1^\circ\,30'$ in punto. Esso non si esprime egualmente con un numero finito di cifre decimali nella divisione moderna. Il primo arco, che si formi coll' aggregare delle 240esime, e che si esprima con un numero finito di decimali del quadrante, è

l'arco di $\frac{3}{240}$, ossia di $\frac{1}{80}$ della circonferenza, il quale è di $4° 30' = 0,05$ del quadrante, cioè di 5 gradi della nuova divisione. Si può dunque coi metodi del Secondo Libro, e per via dei soli tre punti *a*, *b*, ed *e* presi fuori della circonferenza dividerla in parti eguali di cinque gradi moderni ciascuna, e ciò con precisione geometrica, il che è già molto vantaggio di questa Geometria.

252. Si potrebbe, se si volesse, colla bissezione degli archi (§. 60.) dividere in seguito la circonferenza in archi di due gradi, e mezzo ciascuno, ossia di 0,025, quindi proseguire la bissezione, ma con essa non si potrà avere, come è chiaro, un grado precisamente. Non resta dunque mezzo alla Geometria per ottenere l'arco d'un grado (§. 63.), e solo è da cercarsi qualche costruzione, che lo dia almeno prossimamente.

PROBLEMA.

253. Trovare l'arco d'un nuovo grado, ossia di 0,01 senza l'eccesso d'un sesto di minuto secondo della nuova divisione, ossia di tre minuti terzi della vecchia.

Solu-

Soluzione. Si pigli sul compasso la corda di 138° gradi della divisione vecchia, ossia di quarantasei centoventesime parti della circonferenza (§. 42.), e fatto centro in *a* si segni un arco, che tagli il quadrante B*f* in un punto *z*. Sarà l'arco B*z* undici gradi della nuova divisione, dal quale sottraendo l'arco di 9° = 0,10 (§. 252.), resterà un arco = 0,01 coll'eccesso piccolissimo indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione (4) si ponga $A' = 138°$, avremo sen. $A =$ $\frac{1}{2}$(sen. 45° + sen. 183° + sen. − 93°) = $\frac{1}{2}$(sen. 45° − sen. 3° − sen. 87°). Si ha poi

$$
\begin{array}{rr}
-\ \text{sen. } 3° = & -0{,}0523360 \\
-\ \text{sen. } 87° = & -0{,}9986295 \\
\text{sen. } 45° = & 1-2928932 \\
\hline
 & -0{,}3438587 \\
 & -0{,}1719293
\end{array}
$$

Si ha poi sen. 9° 54′ = 0,1719291
sen. 9° 55′ = 0,1722156

Abbiamo dunque l'arco B*z* = A = 9° 54′ col solo eccesso di $\frac{2}{2865}$ di un minuto primo della vecchia divisione, cioè senza l'eccesso di 4‴, e quindi senza l'errore di un sesto di minuto secondo della nuova divisione.

254. Si potrebbe con tavole alquanto più ampie

delle comuni indagare più precisamente un tale errore. In qualunque modo egli è così piccolo, che anche accumulandolo due o tre volte non riuscirebbe sensibile nemmeno nei maggiori quadranti. Ora non ci sarà di bisogno d'accumularlo più di due volte nella divisione di essi. Poichè si ha già con precisione geometrica l'arco di 0,05 (§. 251.). Se in questo si segnano due divisioni di un grado cominciando dai due estremi, e venendo sul verso contrario, si avranno segnati su quest' arco quattro punti, che ne daranno la divisione in cinque gradi, e ciascuno di questi punti non sarà lontano dalla sua vera posizione di sei interi minuti terzi della divisione vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

255. In vigore di questo Problema si supporrà ora divisa la circonferenza nei 400 gradi della nuova divisione.

PROBLEMA.

256. Trovare l'arco di un nuovo mezzo grado senza l'eccesso di sette minuti terzi della division vecchia, ossia di un terzo di minuto secondo della nuova.

Soluzione. Si prenda sul compasso la distanza del punto *b* dal punto K, e con questo raggio bK fatto centro in e si segni un arco, che tagli la circonferenza in un punto z. Sarà l'arco $Bz = -4^\circ 21'$ coll'eccesso minore di $7'''$. Si sottragga da esso un arco di $3^\circ = Np$ (§. 43.). Si avrà di residuo $1^\circ 21'$, cioè un grado e mezzo della nuova divisione, colla corda del quale presa per raggio, e facendo centro in tutti i punti dei gradi (§. 255.) si potranno dividere per metà tutti gli stessi gradi.

Dimostrazione. Se nell'equazione (12) s'introduca $B = BK = 15^\circ$ (§. 32.); risulterà $E = -4^\circ 21' \frac{5}{1901}$. Dunque ec. (§. 242.).

PROBLEMA.

257. Trovare l'arco di un quinto di grado nuovo senza l'eccesso di un minuto secondo vecchio.

Soluzione. Presa sul compasso la corda di 51°, e fatto centro in e si segni un arco, che tagli il quadrante in Z; sarà l'arco BZ di trentasette gradi nuovi coll'aggiunta di un quinto di grado col piccolo errore indicato.

Dimostrazione. Se nell'equazione (6) si faccia $E' = 51^\circ$, si avrà $E = 33^\circ\ 28'\ \frac{1966}{2425} = 33^\circ\ 28'\ 48''\ \frac{1612}{2425}$. Ma $33^\circ\ 28'\ 48'' = 0,372$. Dunque ec.

PROBLEMA.

258. Trovare l'arco di quattro decime di un nuovo grado senza l'eccesso di $16'''$ antichi.

Soluzione. Sia l'arco $BZ = 76^\circ\ 30'$, e si prenda un' apertura di compasso $= bZ$, colla quale fatto centro in a si segni un arco, che tagli il quadrante in un punto Z'. Sarà l'arco $BZ' = 0,094$, cioè a nove gradi nuovi, e quattro decime coll'eccesso indicato.

Dimostrazione. Se nell' equazione (7) s'introduca $B = 76^\circ\ 30'$; ne verrà $A = 8^\circ\ 27'\ \frac{1741}{1877}$. Ma $8^\circ\ 27'\ \frac{1726}{1877} = 0,094$. Dunque ec.

PROBLEMA.

259. Dividere un grado della nuova divisione in dieci parti eguali.

Soluzione. Avendolo diviso per metà per via del §. 256., si sottraggano dall'arco di 0,005 gli archi di 0,004 (§. 258.), e di 0,002 (§. 257.), e si avranno gli archi di 0,001, e di 0,003 con l'errore di soli minuti terzi della vecchia divisione. Si avranno dunque tutti gli archi per la divisione dell'arco di 0,005 in cinque parti, e quindi dividendo similmente l'altra metà del grado, resterà diviso tutto in dieci parti eguali.

260. Si potranno fare sottrazioni, e somme de' suddetti archi in modo, che contrapponendo gli eccessi ai difetti ne risulti una millesima quasi esatta. Si potrà quindi innanzi supporre diviso il quadrante in millesime, ossia di dieci in dieci nuovi minuti. Questi si supporranno esatti per semplicità del calcolo.

PROBLEMA.

261. Trovare l'arco d'un nuovo minuto senza l'errore di un vecchio minuto terzo.

Soluzione. Sia un arco $Bz = 1° \, 30'$. La distanza az sarà corda di un arco di

1,3609 senza l'errore indicato. Sottraendo quest'arco dall'arco di 1,361 (§. 260.), si avrà l'arco di 0,0001.

Dimostrazione. Se nell'equazione (1) si ponga $A = -1^\circ 30'$, risulta $A' = 122^\circ 28' \frac{2311}{2654} = 122^\circ 28' 51'' 36''' = 1,3609$ (§. 250.). Dunque ec.

PROBLEMA.

262. Trovare l'arco di due nuovi minuti senza l'errore di un vecchio minuto terzo.

Soluzione. Sia l'arco $Bz = -48^\circ$. La distanza bz sarà corda di un arco di 0,4422 colla precisione indicata. Da quest'arco sottraendo l'arco di 0,442 (§. 260.), resterà l'arco di 0,0002.

Dimostrazione. Se nell'equazione (2) si ponga $B = -48^\circ$, risulta $B' = 39^\circ 47' \frac{1639}{1862} = 39^\circ 47' 52'' 48''' = 0,4422$ (§. 250.). Dunque ec.

PROBLEMA.

263. Trovare l'arco di tre nuovi minuti senza l'errore di un nuovo minuto terzo.

Soluzione. Sia un arco $Bz = -78^{\circ}$. Colla distanza ez presa per raggio, e fatto centro in a si segni un arco, che tagli il quadrante Bf in un punto z'. Sarà l'arco $Bz' = -0,0187$ senza l'errore indicato. Se si sottrae quest' arco dall'arco $= -0,019$ (§. 260.), resterà l'arco $= -0,0003$.

Dimostrazione. Se nell' equazione [9] si ponga $E = -78^{\circ}$, risulta negativo il seno di A. Se si cambiano i segni ai due membri dell' equazione, risulta log. sen. $A = 8.4678991$. Ora nelle nuove Tavole del Callet per la nuova divisione del cerchio si trova
$8.467:8990 =$ log. sen. $0,0187$.
Da l. sen. $A = 8.4678991$
si sottr. $DS = \underline{6.1960574}$ (*Vedi Callet*)
si avrà $\quad 2.2718417 =$ log. $187,00004$
Si ha dunque $A = -0,018700004$. L'errore si trova anche minore, se s' impiegano più cifre nei logaritmi.

264. La somma approssimazione nella posizione del punto in questi tre Problemi antecedenti, e spezialmente nell' ultimo è tale, che non si può desiderare di più. Per via degli archi t ovati con essi

Problemi si può in più maniere dividere una millesima di quadrante (§. 260.) in dieci parti eguali, cioè in minuti primi della nuova divisione del cerchio.

265. Nella stessa guisa si potrebbe passare a divisioni più minute. Ma bisognerebbe impiegare tavole più copiose di cifre di quelle, che io ho generalmente impiegate nel calcolare le dodici equazioni soprammentovate. Ciò si potrebbe fare, qualora l' uso richiedesse, che si spinga la divisione d' una circonferenza oltre i minuti primi del nuovo sistema Francese.

PROBLEMA.

266. In un cerchio di dato raggio AB trovare una corda B*b* eguale prossimamente ad un quarto della circonferenza.

Fig. 101.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza ad AB = BC = CD = DE. Quindi a BD = B*a* = E*a*. Col centro C, e col raggio C*a* si segni un arco, che tagli la circonferenza in *b*. Sarà la B*b* la corda cercata.

Dimostrazione. Supposto $AB = 1$, si ponga $BC = A = 60°$ nell' equazione (1); risulterà $A' = 43° 33' \frac{286}{2001} = Cb$. Sarà dunque l' arco $BCb = 103° 33' \frac{286}{2001}$. La sua metà $51° 46' \frac{1143}{2001}$ ha per seno 0,7855998. Sarà dunque la corda $Bb = 1,5711996$. Il quarto della circonferenza è poi $= 1,5707963$. L' errore dunque è di 0,0004 circa.

267. Secondo la proporzione di Archimede posto il raggio $= 1$; si trova il quarto della circonferenza $= \frac{11}{7} = 1,5714$. Dunque la costruzione di questo Problema (§. 266.) dà un'approssimazione maggiore. Essendo questa costruzione semplicissima, sarà da usarsi in pratica a preferenza di altre, che potremmo aggiungere, che darebbero bensì una maggiore approssimazione teorica, ma sarebbero più complicate, e però più soggette ad errore.

PROBLEMA.

268. In un cerchio di dato raggio AB
Fig. trovare l'arco eguale prossimamente allo
102. stesso raggio.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza $BLCMFDOEd$ ad $AB = BC = CD = DE = Ed$. Quindi a $BD = Ba =$

Ea. Quindi ad $Aa = BF = Db = db = aL$. Quindi ad $AB = FO$. Quindi finalmente a $bF = OM$. Sarà l'arco LM eguale prossimamente al raggio.

Dimostrazione. Se nell'equazione (4) s'introduce $A' = 90°$, del quale arco è corda la aL; risulterà $BL = A = 20° \, 42' \frac{496}{1721}$. Essendo poi $OM = bF$ corda della quinta parte della circonferenza (§. 40.), cioè di $72°$, ed essendo l'arco $FO = 60°$; sarà l'arco $FM = 12°$. Quindi l'arco $LM = BF - BL - FM = 57° \, 17' \frac{1225}{1721} = 57° \, 17' \, 43'' +$. Si ha poi l'arco eguale al raggio, come è noto $= 57° \, 17' \, 44''$. Dunque ec.

PROBLEMA.

269. Trovare il lato di un quadrato, che prossimamente sia eguale in area ad un cerchio di raggio dato AB.
Fig. 103.

Soluzione. Si faccia nella circonferenza BPCQDRE ad $AB = BC = CD = DE$, e collo stesso raggio BA, e coi centri B, ed E si descrivano i due archi ALc, AMd. Coi centri C, e D, e col raggio DB si descrivano gli archi

cNM, dNL. Si faccia ad $AN = BP = PQ$; quindi ad $LM = QR$. Sarà BR il lato cercato.

Dimostrazione. Se nel triangolo isoscele CND si suppone la base $CD = 1$ divisa per metà in μ; si avrà $(CN)^2 = (C\mu)^2 + (N\mu)^2$, cioè (§. 2.) $3 = \frac{1}{4} + (N\mu)^2$; quindi $N\mu = \frac{1}{2}\sqrt{11}$. Si ha poi $(CA)^2 = (C\mu)^2 + (A\mu)^2$, e quindi $A\mu = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sarà dunque $AN = \frac{1}{2}(\sqrt{11} - \sqrt{3}) = 0{,}7922869$, che si trova essere corda di un arco $= 46^\circ 40' \frac{1378}{2071} = BP = PQ$. Sarà dunque l'arco $BQ = 93^\circ 20' \frac{2744}{2071}$. Siano condotte le rette BL divisa per metà in n, BD, Dn, BE, e le $D\delta$, Ll, Mm perpendicolari alla stessa BE in δ, l, ed m.

Essendo l'angolo $DBE = 30^\circ$ (20. lib. 3.); sarà sen. $DBE = \frac{1}{2}$; cos. $DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sarà poi per la Trigonometria cos. $DBn = \dfrac{Bn}{DB}$; sen. $DBn = \dfrac{Dn}{DB}$; cioè cos. $DBn = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; e per essere $Dn = \sqrt{((DB)^2 - (Bn)^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$, sen. $DBn = \frac{1}{6}\sqrt{33}$. Si ha poi (§. 154.) cos. LBl = cos. $(DBn - DBE)$ = cos. DBn. cos. DBE + sen. DBn. sen. DBE $= \frac{1}{6}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\sqrt{33} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}(3 + \sqrt{33}) = \dfrac{Bl}{BL} = Bl$ (per essere $BL = BA = 1$).

Dunque $Al = AB - Bl = \frac{1}{12}(9 - \sqrt{33})$, e quindi $lm = LM = 2Al = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{33})$ $= 0,5425729$, che si trova essere corda dell' arco $= 31^\circ 28' \frac{1598}{2799} = QR$. Sarà dunque l'arco $BQR = 124^\circ 49' \frac{6390}{7479}$. La sua metà $62^\circ 24' \frac{6943}{7479}$ ha per seno $0,8863283$, e però la corda di BQR sarà $= 1,7726566$. Ora posto il raggio $= 1$; si ha l'area del cerchio $= 3,1415926$, che ha per logaritmo $0,4971499$. La metà di questo logaritmo cioè $0,2485749 = \log.\sqrt{3,1415926}$ si trova essere $\log. 1,772453$. Si ha dunque l'errore di $0,0002$ circa, il che dà un' approssimazione sufficiente.

270. In vece della AN si avrebbe potuto adoperare la dL, o la cM, che si devono trovare eguali alla stessa AN.

Dimostrazione. Se si guidi la dL, e la Dp alla sua metà in p; sarà $\text{sen.}\, LDp = \frac{Lp}{DL}$. Ma l'angolo $LDp = \frac{1}{2} LDd = \frac{1}{2}(BDd - BDL) = 30^\circ - BDn$. Dunque (§. 154.) $\text{sen.}\, LDp = \frac{1}{2} \cos.\, BDn - \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \text{sen.}\, BDn$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{6}\sqrt{3}$. Quindi $Lp = DL \,.\, \text{sen.}\, LDp = \frac{1}{4}\sqrt{11} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$, ed $Ld = \frac{1}{2}\sqrt{11} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = AN$.

PROBLEMA.

271. **D**ato il lato AB d'un quadrato; trovare il raggio di un cerchio, che gli sia prossimamente eguale in area. Fig. 104.

Soluzione. Col raggio AB, centro A si descriva la circonferenza BCFDLPMEd. Si faccia ad AB = BC = CD = DE = Ed. Col centro B, e col raggio BD si descriva l'arco dnNDa. Collo stesso raggio, e col centro E si tagli quell'arco in a. Si faccia ad Aa = BF = Db = db. Quindi ad AB = Dn = dN. Col centro C, e col raggio CN si tagli la circonferenza in P. Si faccia ad Nn = PM; quindi ad Fb = CL. Sarà LM il lato cercato.

Dimostrazione. Se si supponga AB = 1, avendo il triangolo BNd i lati rispettivamente eguali ai lati del triangolo BDL della Fig. 103.; si avrà sen. $\frac{1}{2}d$BN = $\frac{1}{6}\surd 3$; cos. $\frac{1}{2}d$BN = $\frac{1}{6}\surd 33$ (§. 270.). Quindi sen. dBN = 2 sen. $\frac{1}{2}d$BN . cos. $\frac{1}{2}d$BN (§. 154.) = $\frac{1}{6}\surd 11$; cos. dBN = $\surd$(1 − sen.^{2} dBN) = $\frac{5}{6}$. Essendo poi CBd angolo retto (31. lib. 3.), sarà cos. CBN = sen. dBN = $\frac{1}{6}\surd 11$. Ma si ha dalla Trigonometria $(CN)^2 = (BC)^2 + (BN)^2 - 2BC \,.\, BN \,.\, \cos. CBN$. Dunque $CN = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3} \times \frac{1}{6}\sqrt{11})} = \sqrt{(4 - \frac{1}{3}\sqrt{33})} = 1,4440025$, che si trova essere corda di $92^\circ 26' \frac{804}{2015} = CP$. Essendo poi $\text{sen.}\, NBE = \frac{\frac{1}{2} Nn}{BN} = \text{sen.}(CBE - CBN) =$ (§. 154.) $\text{sen.}\, 60^\circ \cos. CBN - \cos. 60^\circ \,.\, \text{sen.}\, CBN = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{1}{6}\sqrt{11} - \frac{1}{2} \,.\, \frac{5}{6}$; sarà $Nn = 2BN \times \text{sen.}\, NBE = \frac{1}{6}(3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0,2149367$, che si trova essere corda di $12^\circ 20' \frac{246}{2592} = PM$. Sarà dunque l'arco $CPM = 104^\circ 46' \frac{4310}{5112}$, dal quale sottratto l'arco CL, che è una quinta parte della circonferenza (§. 40.) $= 72^\circ$, resterà l'arco $LM = 32^\circ 46' \frac{4310}{5112}$, la corda del quale si trova $= 0,5643274$. Ora posto π il rapporto della circonferenza al diametro, ed R il raggio di un cerchio, si ha la sua area $= \pi R^2$, come è noto. Fatto dunque $\pi R^2 = 1$, che è l'area del quadrato di raggio $AB = 1$, al quale si vuole eguale il cerchio, si avrà $R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, e $\log. R = -\frac{1}{2}\log. \pi = -0,2485749 = -1 + ,7514251 = \log. 0,5641896$. Non si commetterà dunque l'errore di 0,0002.

PROBLEMA.

272. Dato il raggio AB d'una sfera; trovare il lato di un cubo eguale prossimamente in solidità alla medesima.

Fig. 105.

Soluzione. Col raggio AB, centro A descritta la circonferenza BGCDPEd; si faccia ad AB = BC = CD = DE = Ed. Col centro B, raggio BD si segni l'arco aDNd. Collo stesso raggio, e col centro E si tagli quest'arco in a. Si faccia ad AB = aG = dN. Quindi a CN = CP. Sarà PG il lato cercato.

Dimostrazione. Poichè sarà (§. 271.) CN corda di $92^\circ\ 26'\frac{804}{1013}$. Sarà poi GC = 15° (§. 32.). Quindi PG = $107^\circ\ 26'\frac{804}{1013}$, del quale arco la corda si trova essere eguale a 1,6122696, supponendo AB = 1. Ora nella stessa supposizione, e supposto il rapporto della circonferenza al diametro = π; si ha la solidità della sfera = $\frac{4}{3}\pi$, e il suo logaritmo = l. 4 + l. π — l. 3 = 0,6220886, il di cui terzo 0,2073628 si trova essere logaritmo di 1,611991. Laonde l'errore, che si commette, non arriva a 0,0003.

PROBLEMA.

273. Dato il lato AB di un cubo; tro-
Fig. vare il raggio d'una sfera, che gli sia
106. proffimamente eguale in solidità.

Soluzione. Col raggio AB, centro A si descriva la circonferenza BLCMFDE. Si faccia ad $AB = BC = CD = DE$. Quindi a $BD = Ba = Ea$; quindi ad $Aa = BF$; quindi ad $Fa = FM$, ad $FA = FL$. Sarà LM il raggio cercato.

Dimostrazione. Sarà l'arco $FL = 60°$ (15. lib. 4.). Si ha poi (posto $AB = 1$) $aF = Aa - AF = \sqrt{2} - 1$ (§. 27.) $= 0,4142136$, che si trova essere corda di $23° \, 54' \frac{976}{2046}$. Sarà dunque l'arco $LM = 36° \, 5' \frac{1070}{2046}$, il quale ha per corda 0,6195986. Ora essendo, come è noto, la solidità d'una sfera di raggio R espressa dalla formola $\frac{4}{3}\pi R^3$, fatto $\frac{4}{3}\pi R^3 = 1$, che è la solidità del dato cubo, si avrà $\log. R = \frac{\log. 3 - \log. 4 - \log. \pi}{3}$ $= -1 + ,7926371 = \log. 0,6203504$. L'errore dunque, che si commette per difetto, non arriva a 0,0008.

274. Tutte queste approssimazioni nella ret-

tificazione,

tificazione, quadratura, e cubatura della circonferenza, del cerchio, e della sfera, e nei Problemi inversi, non lasciando errori di una millesima di raggio, si stimano essere sufficienti per la pratica. Chi ne volesse di più avanzate, non avrà a far altro, che trovare col calcolo di quale arco in gradi, e minuti sia corda quella quantità lineare, che cerca; quindi ricavare questa corda dal cerchio dopo d'averlo diviso in quei gradi, e minuti, che occorrono, adoperando i metodi dimostrati quì sopra (§. 235. 243.).

PROBLEMA.

275. Duplicare il cubo per approssimazione.

Soluzione I. Sia AB il lato del cubo, che si vuol duplicare. Col centro A, e col raggio AB descritta la circonferenza BQMNCFPDE*dc*, e fatto in essa ad AB = BC = CD = DE; quindi a BD = B*a* = E*a*; quindi ad A*a* = BF; quindi ad FA = FN; sarà *a*N prossimamente il lato del cubo doppio.
Fig. 107.

Dimostrazione. Sarà l' arco BN una duodecima della circonferenza (§. 31.) $= 30°$. Se s' introduce quest' arco $BN = A$ nell' equazione (1); l'arco A', del quale è corda la aN, risulterà $= 78° 2' \frac{2358}{2840}$. Si ha dunque (posto $AB = 1$) $aN = 2 \text{sen.} 39° 1' \frac{1179}{2840} =$ $1,2592800$. Si ha poi $\sqrt[3]{2} = 1,2599209$. Non si commette dunque un difetto di 0,0007.

Soluzione II. Se si volesse un' esattezza maggiore; fatta la costruzione della Soluzione I., e fatto inoltre ad $AB = Ed = dc$; quindi ad $Aa = BF = Db = db$; quindi ad $aN = cM = MP$; quindi ad $Fb = FQ$; sarà PQ il lato cercato con molto maggiore approssimazione.

Dimostrazione. Essendo per la Dimostrazione della Soluzione I. l'arco $cM = 78° 2' \frac{2358}{2840} = MP$; sarà l'arco $cMP = 146° 5' \frac{1870}{2840}$. Sottratto poi l'arco $FQ = 72°$ (§. 40.) dall' arco $FBc = 150°$ (§. 27. 29.); resterà l' arco $cQ = 78°$, il quale sottratto dall' arco cMP lascierà l' arco $QP = 78° 5' \frac{1870}{2840}$; la corda del quale si trova essere $=$ $1,2599190$. Non si commetterà dunque, se non un difetto di 0,0000019, cioè di due millionesime di raggio appena.

PROBLEMA.

276. Triplicare, quadruplicare ec. il cubo fino alla ottuplicazione.

Fig. 108.

Soluzione. Sia AB il lato del cubo dato. Col raggio AB, e col centro A si descriva la circonferenza $B\omega G\mu C\varepsilon\nu FLDOEdc$. Si faccia in essa ad $AB = BC = CD = DE = Ed = dc$. Collo stesso raggio AB, e coi centri B, c, d, E, D si descrivano gli archi $A\pi c$, Aqd, $c\beta A\delta E$, Apd, $A\tau E$. Col raggio BD, centro B si descriva l'arco $d\tau\delta Da$; collo stesso raggio, e col centro E si tagli quest'arco in a. Collo stesso raggio, e coi centri C, e D si descrivano gli archi $cpqE$, $B\beta\pi d$. Si faccia ad $Aa = BF$; quindi ad $AB = FO = aG = GL$; quindi ad $EL = a\omega$; quindi a $\pi\tau = B\varepsilon$; quindi a $p\delta = B\mu$; a $q\tau = \mu\nu$. Si avrà

aO	lato del cubo	duplo (§. 275.)
$C\delta$		triplo
OG		quadruplo
$O\omega$		quintuplo
$c\varepsilon$		sestuplo
$c\nu$		settuplo
BE		ottuplo

Dimostrazione. Posto $AB = 1$; si avrà (§. 271.) $C\delta = \sqrt{(4 - \frac{1}{3}\sqrt{33})} = 1,4440033$. Si ha poi $\sqrt[3]{3} = 1,4422493$. L'eccesso dunque non arriva a $0,002$.

Essendo l'arco $OFG = 105°$ (§. 29, 30.), sarà la sua corda $OG = 2 \operatorname{sen.} 52° 30' = 1,5867066$. Si ha poi $\sqrt[3]{4} = 1,5874007$. Il difetto dunque è di $0,0007$ circa.

Sarà poi l'arco $EL = \frac{5}{24}$ della circonferenza (§. 32.) $= 75°$. Se nell'equazione (4) s'introduce $A' = 75°$; risulta l'arco $A = B\omega = 32° 27' \frac{17}{2454}$. Sarà dunque $F\omega = 57° 32' \frac{2437}{2454}$. Quindi essendo $FO = 60°$ (15. lib. 4.), sarà l'arco $OF\omega = 117° 32' \frac{2437}{2454}$, che ha per corda $1,7102744$. Si ha poi $\sqrt[3]{5} = 1,7099757$. L'eccesso dunque non arriva a $0,0003$.

Essendo $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$, e $D\tau = B\pi = 1$; sarà (§. 23.) $\pi\tau . BD = (BD)^2 - (B\pi)^2$; cioè $\pi\tau . \sqrt{3} = 2$; quindi $\pi\tau = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1,1547005$, che si trova essere corda di $70° 31' \frac{1715}{2175} = B\epsilon$. Sarà dunque l'arco $\epsilon B\epsilon = 130° 31' \frac{1926}{2175}$, il quale ha per corda $1,8164964$. Si ha poi $\sqrt[3]{6} = 1,8171204$. Si commette dunque un difetto minore di $0,0007$.

I due triangoli $C\delta p$, $Bp\delta$ avendo i lati rispettivamente eguali, saranno eguali (8, e 26. lib. 1.); ed essendo sulla stessa base $p\delta$, saranno tra le stesse parallele $p\delta$, BC (39. lib. 1.). Sarà dunque l'angolo $CB\delta = B\delta p$ (27. lib. 1.). Dunque cos. $CB\delta = \frac{1}{6}\sqrt{11}$ (§. 271.) $=$ cos. $B\delta p$. Si ha poi dalla Trigonometria $(Bp)^2 = (B\delta)^2 + (p\delta)^2 - 2B\delta \cdot p\delta \cdot \cos. B\delta p$; ed essendo $Bp = C\delta$, poichè si determina colla stessa costruzione; si avrà $4 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = 3 + (p\delta)^2 - 2p\delta \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{6}\sqrt{11}$; quindi $1 - \frac{1}{3}\sqrt{33} = (p\delta)^2 - p\delta \cdot \frac{1}{3}\sqrt{33}$. Aggiungendo da una parte, e dall'altra dell'equazione il quadrato di $\frac{1}{6}\sqrt{33}$; risulterà $(1 - \frac{1}{6}\sqrt{33})^2 = (p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33})^2$; quindi $p\delta - \frac{1}{6}\sqrt{33} = \pm(1 - \frac{1}{6}\sqrt{33})$. Si ha poi (§. 23.) $p\delta \cdot dE = (dE)^2 - (pd)^2$; cioè $p\delta = 1 - (pd)^2$; e quindi minore dell' unità; quindi si determinerà $p\delta = \frac{1}{3}\sqrt{33} - 1 = 0{,}9148541$, che si trova essere corda di $54^\circ\, 26' \frac{1408}{2588}$. Si ha poi $qr = LM$ della Fig. 103. $=$ alla corda dell' arco $31^\circ\, 28' \frac{2618}{2759}$ (§. 269.). Dunque l' arco $cB\mu\nu = 60^\circ + 54^\circ\, 26' \frac{1408}{2588} + 31^\circ\, 28' \frac{2618}{2799} = 145^\circ\, 55' \frac{1607}{1022}$; del quale arco si trova essere la corda $c\nu = 1{,}9122214$.

Si ha poi $\sqrt[3]{7} = 1{,}9129309$. Si commette dunque un difetto minore di $0{,}000702$.

Si ha poi $BE = 2 = \sqrt[3]{8}$.

Dunque ec.

PROBLEMA.

277. Sudduplicare il cubo prossimamente.

Soluzione. Sia AB il lato del cubo dato. Si descriva col centro A, raggio
Fig. 108. AB la circonferenza BCDEd, e si faccia ad AB = BC = CD = DE = Ed; quindi col raggio BD, centro B si segni l'arco Dδd. Col centro d, raggio dA si segni l'arco AδE. Sarà Dδ il lato cercato.

Dimostrazione. La Dδ di questa Figura è determinata come la dL della Fig. 103. Sarà dunque (§. 269.) Dδ = 0,7922869. Ora si ha $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ = 0,7937039. Si commette dunque un difetto minore di 0,002.

278. Non abbiamo voluto ommettere le Soluzioni di questi due ultimi Problemi (§. 276. 277.), benchè alcuni risultati contengano errore di una, o due millesime, e gli altri di qualche diecimillesima; perchè in molti casi tali errori riusciranno trascurabili, e d'altra parte le Soluzioni ci sono sembrate semplici. Si potrebbero avere valori

molto più esatti, qualora facesse d' uopo non solo per formare cubi nei rapporti espressi quì sopra, ma anche in altri, se si cercasse di qual arco espresso in gradi, minuti, e parti di minuti sieno corde le radici cubiche, o le metà, terzi ec. delle radici cubiche richieste alla costruzione del cubo cercato, e si ricavassero poi queste corde dal cerchio diviso appunto in gradi minuti ec. (§. 243. 244. ec.), e s' impiegassero poi queste corde, o i loro multipli (§. 64. 65.) alla stessa costruzione del cubo.

279. E quì sia fine ormai a questa Geometria del Compasso, che se non dispiacerà ai Geometri, e se potrà in qualche modo servire agli Artisti, ai Disegnatori, e spezialmente ai Divisori de' cerchj per gli usi Geografici ed Astronomici; io mi troverò della lunga noja divorata nel comporla abbastanza ricompensato.

F I N E.

INDICE DEI LIBRI

DI QUESTA GEOMETRIA.

Fig. 1. sino alla 10.

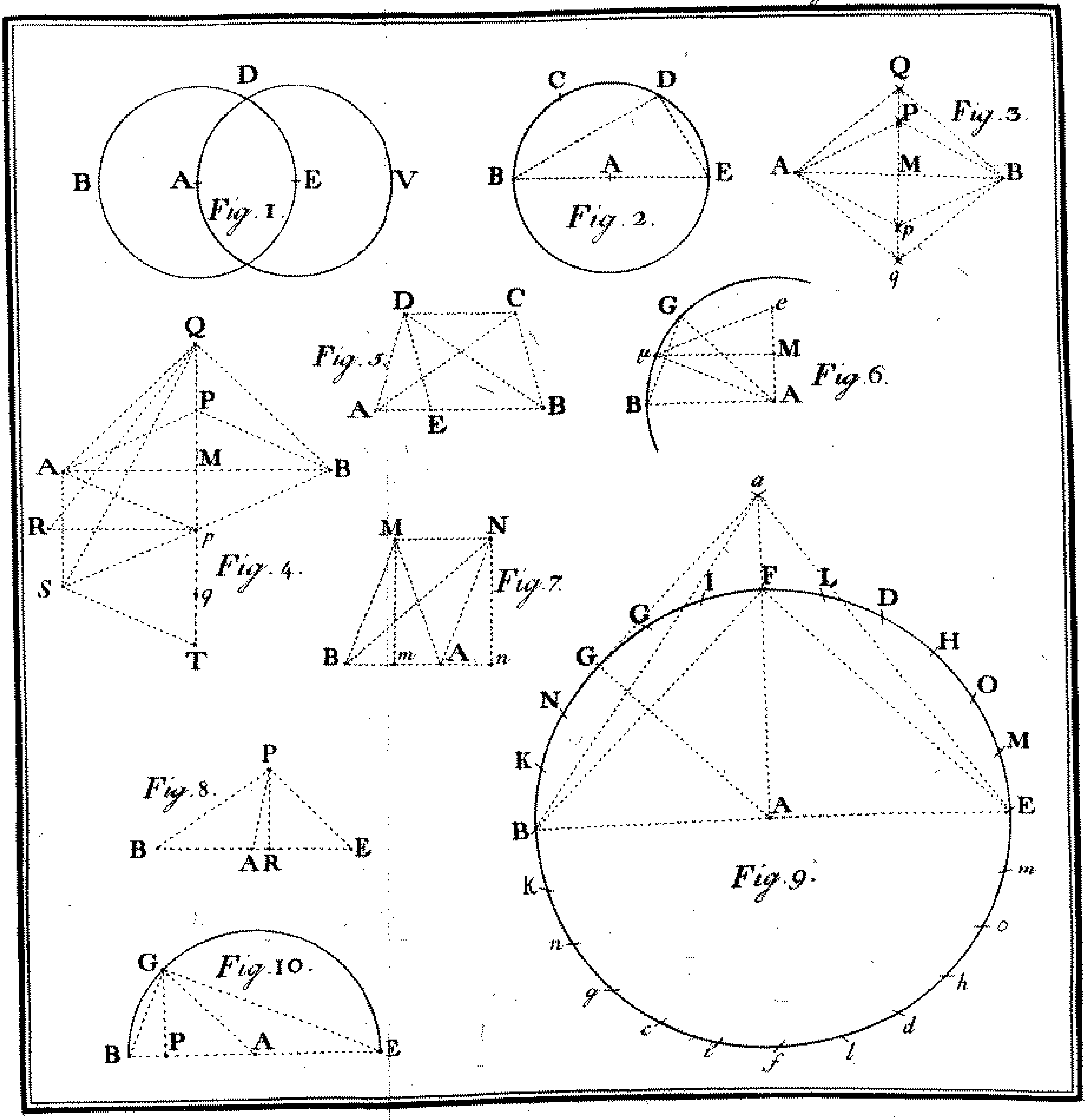
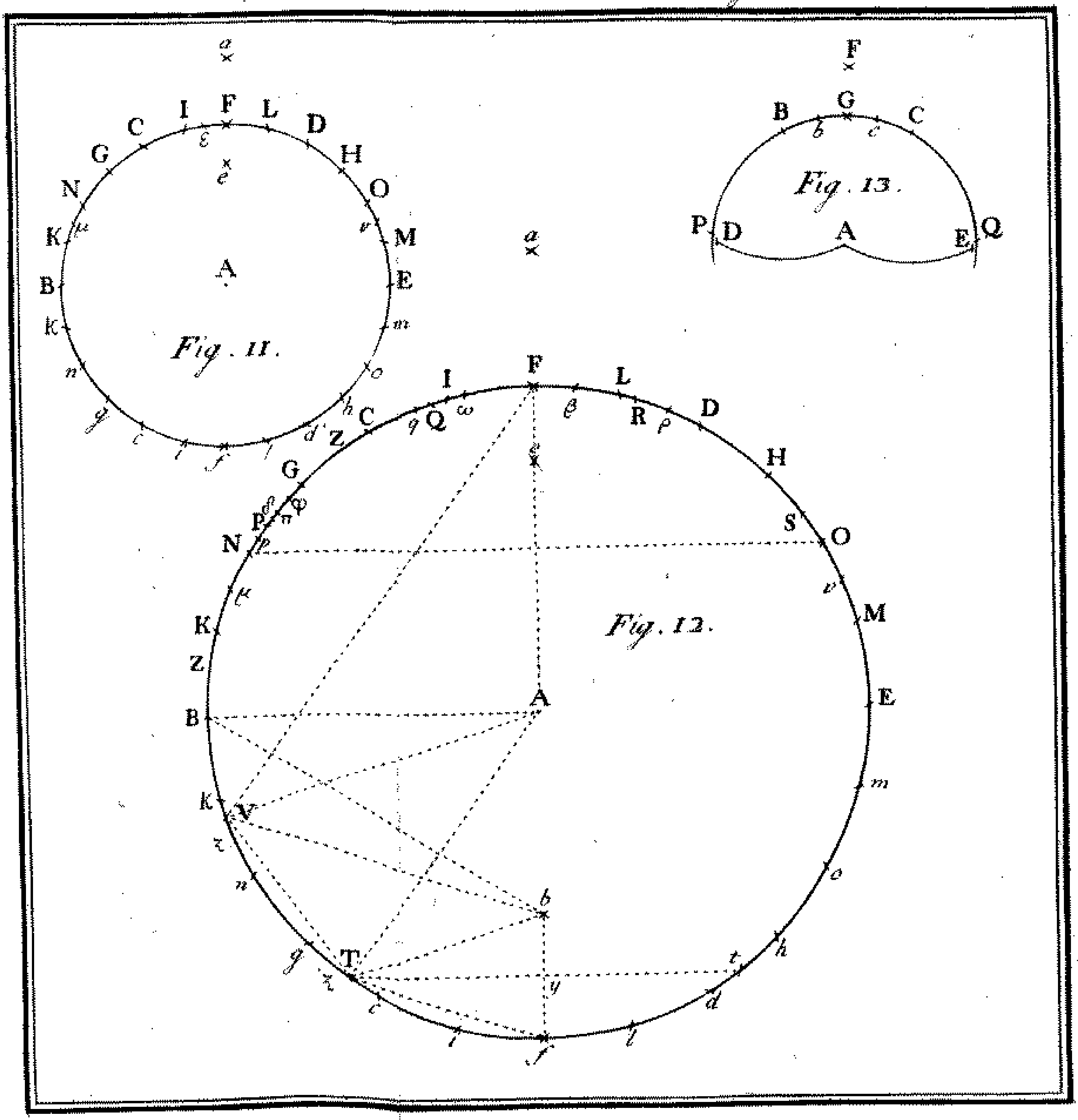


Fig. 11 sino alla 13.



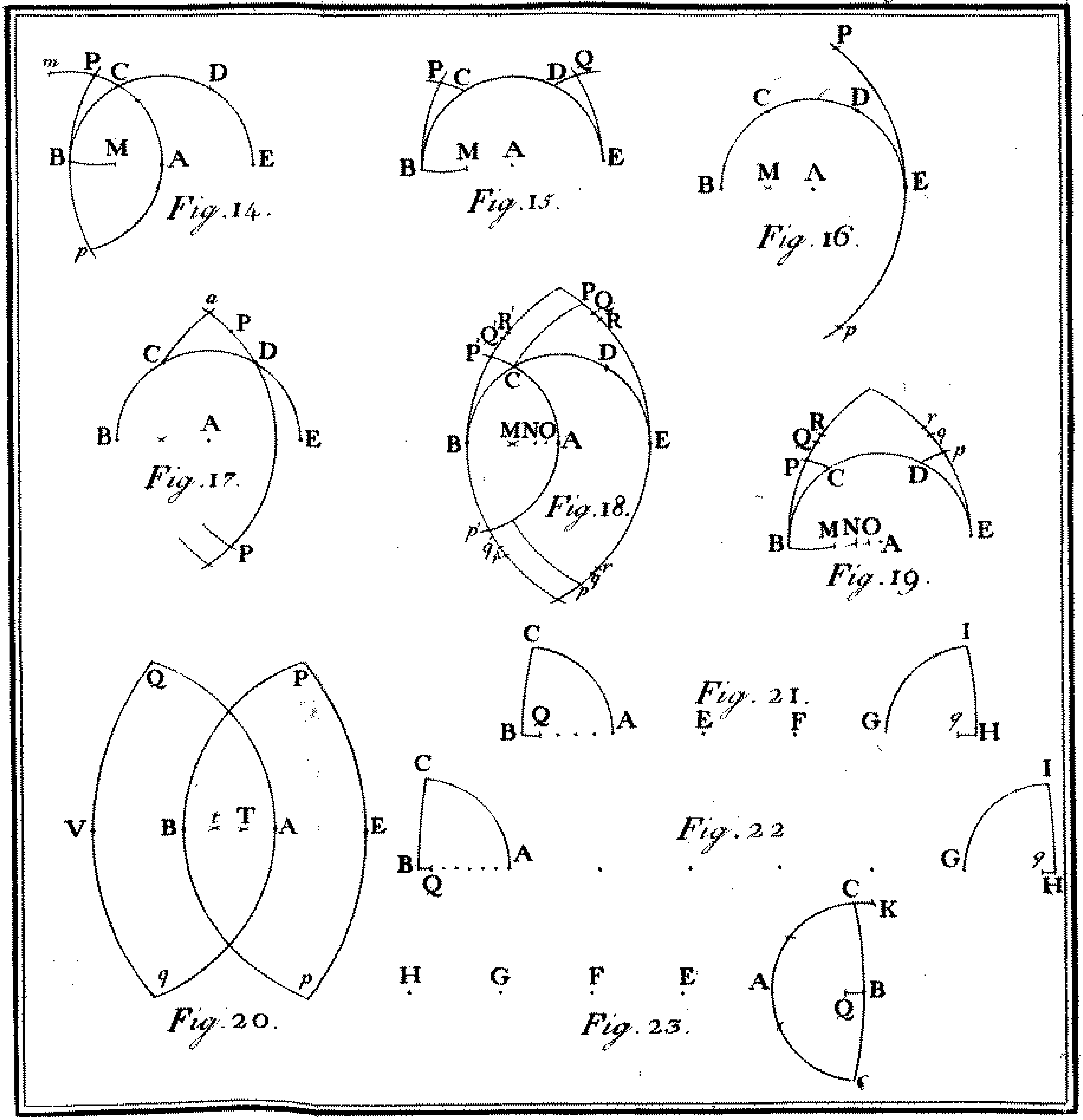


Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22

Fig. 23.

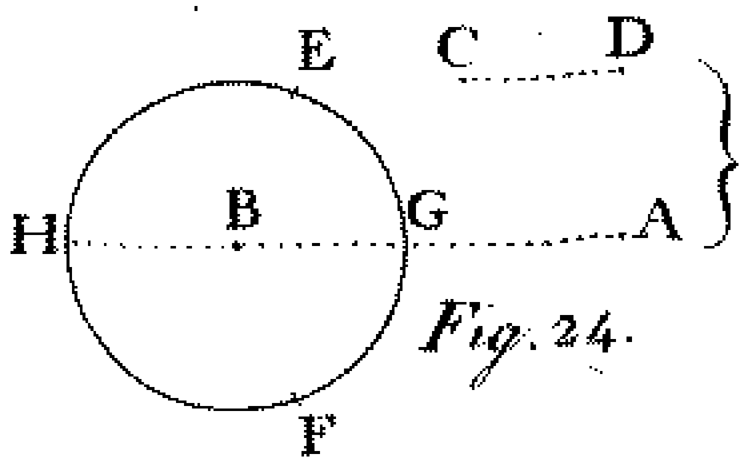


Fig. 24.

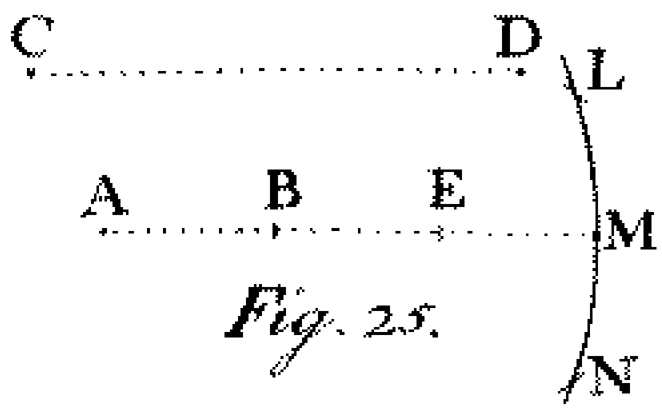


Fig. 25.

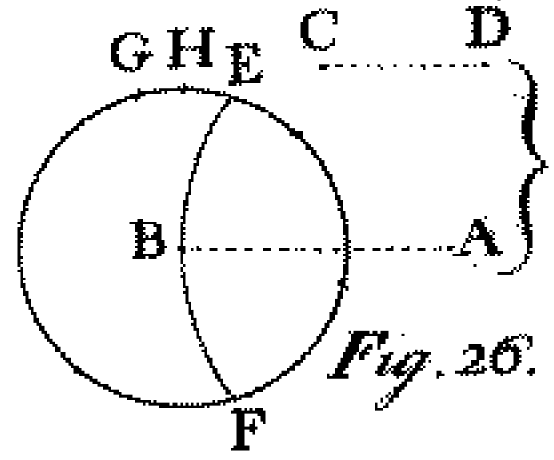


Fig. 26.

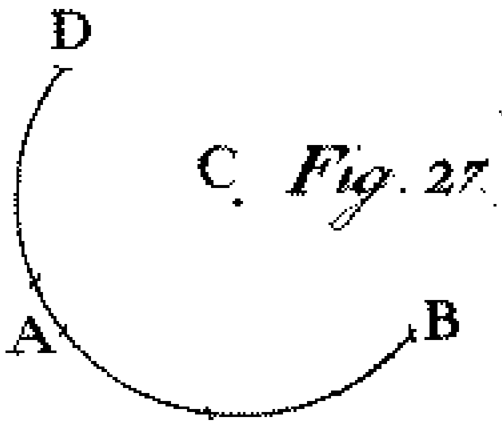


Fig. 27

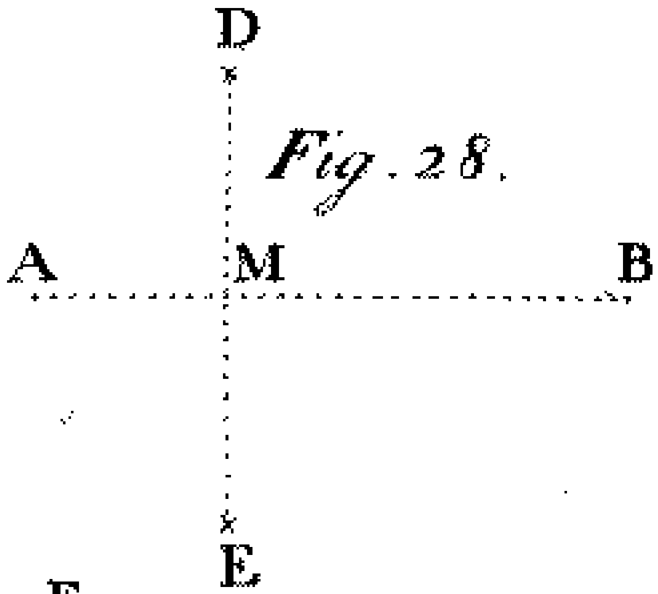


Fig. 28.

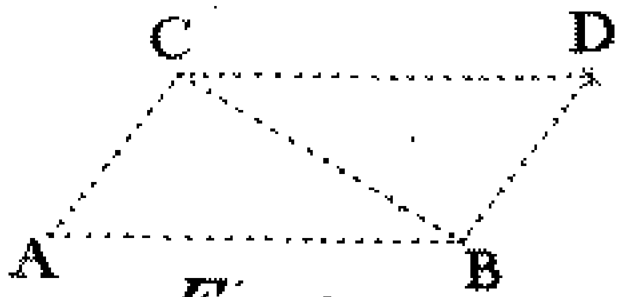


Fig. 29.

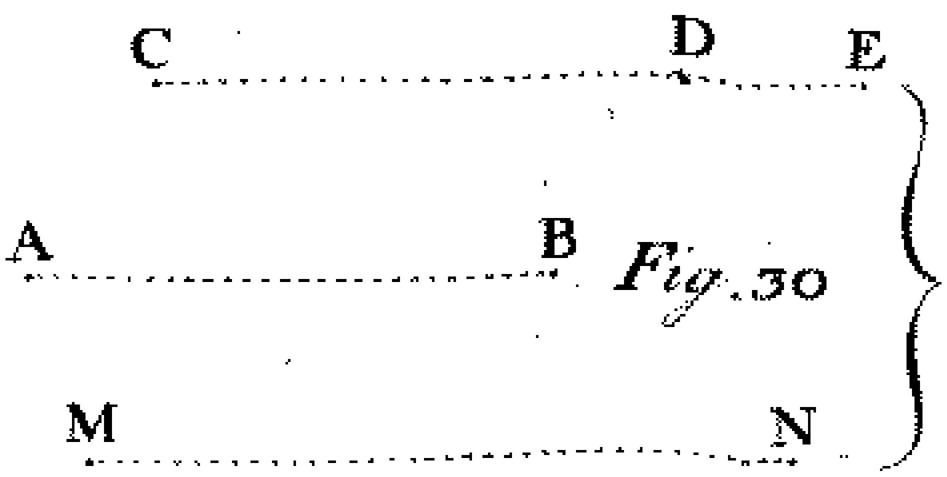


Fig. 30

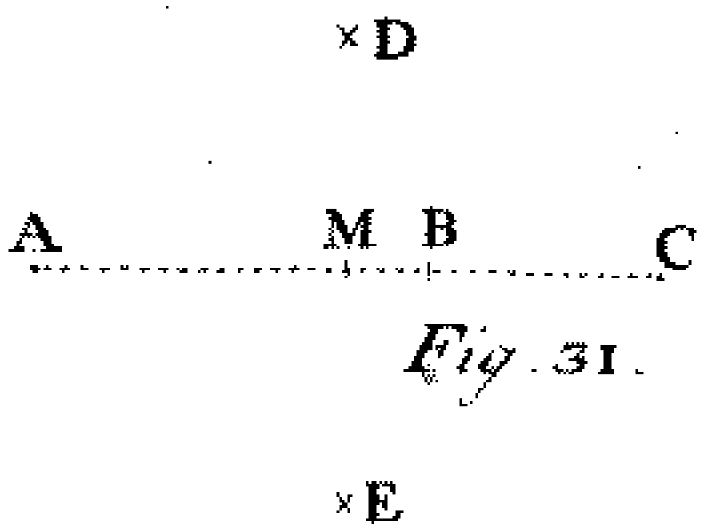


Fig. 31.

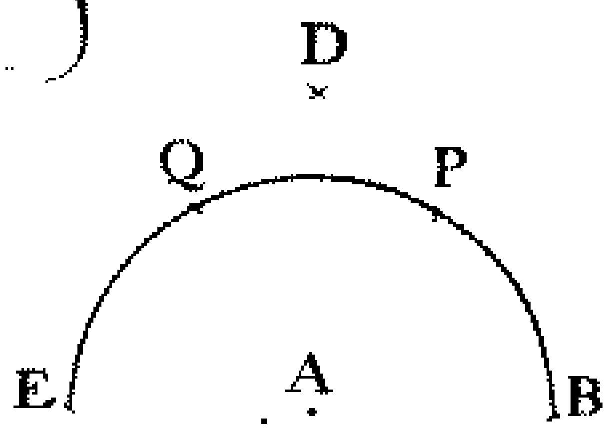


Fig. 32.

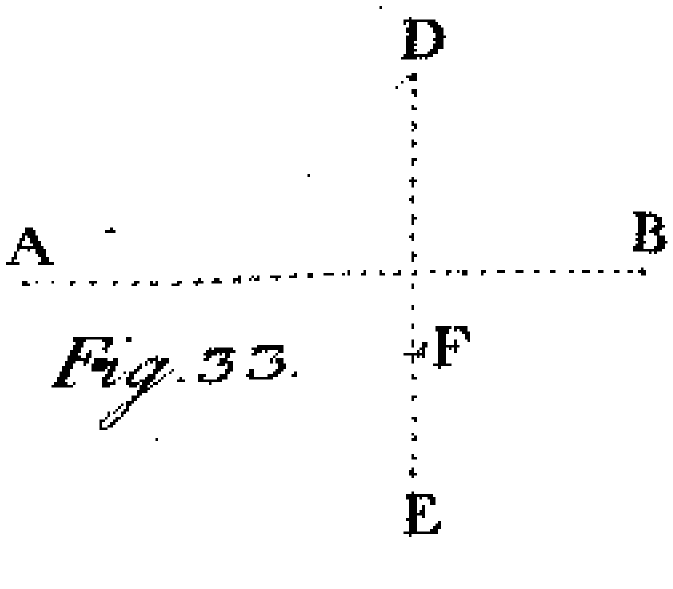


Fig. 33.

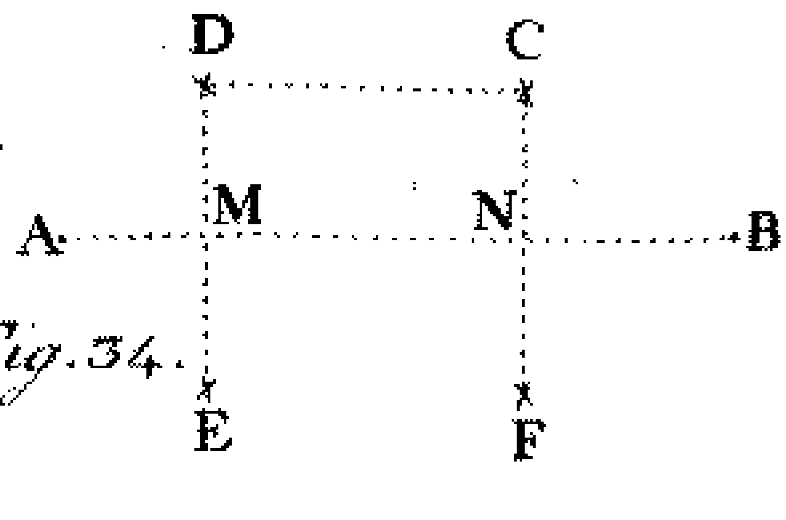


Fig. 34.

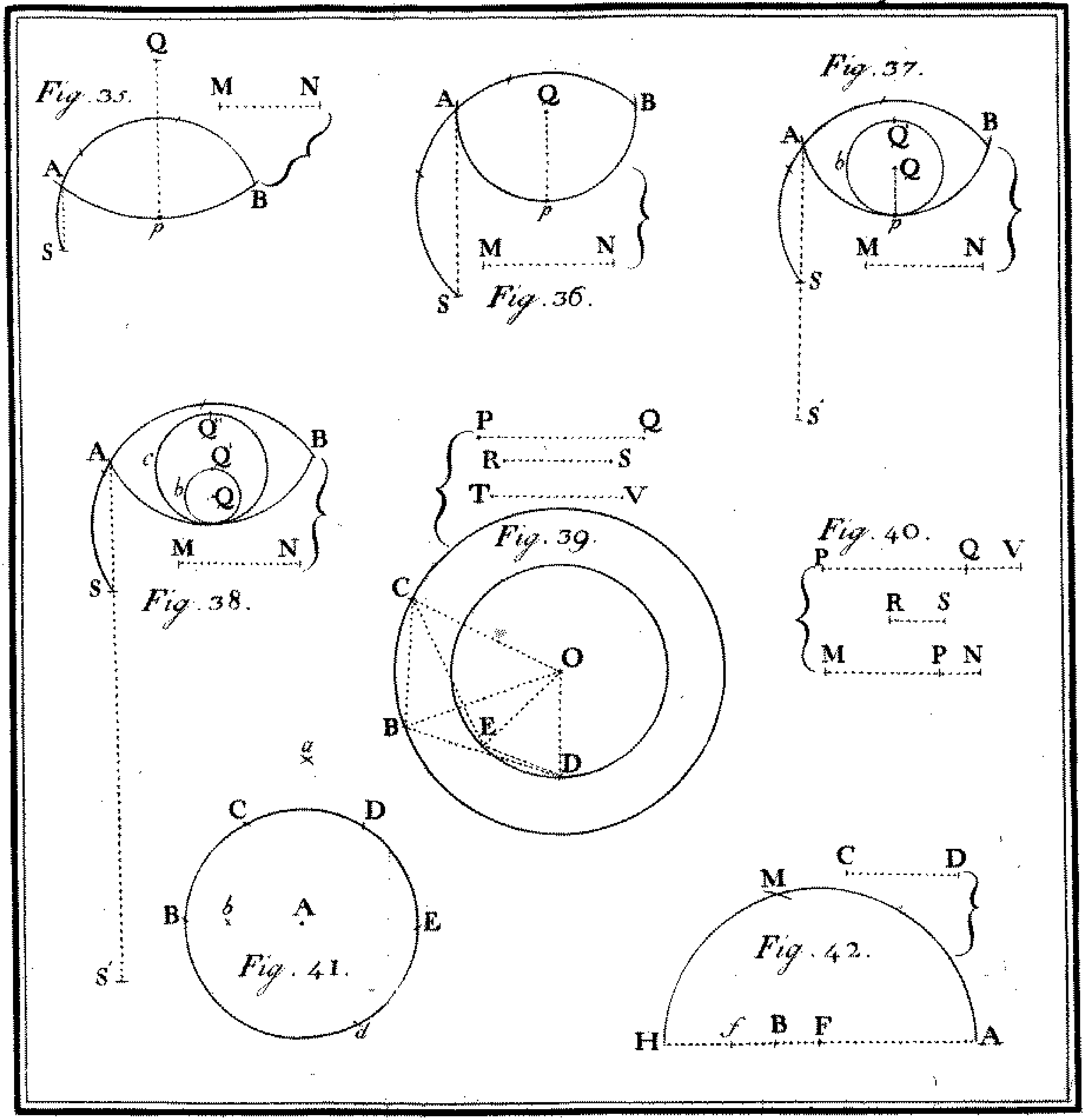


Fig. 35.
Q
M N
A B
p
S
Fig. 36.
A Q B
p
M N
S
Fig. 37.
A B
Q
b Q
p
M N
S
S
Fig. 38.
A B
Q
c Q
b Q
M N
S
S
Fig. 39.
P Q
R S
T V
C
O
B E
D
Fig. 40.
P Q V
R S
M P N
Fig. 41.
a
C D
B b A E
d
Fig. 42.
C D
M
H f B F A

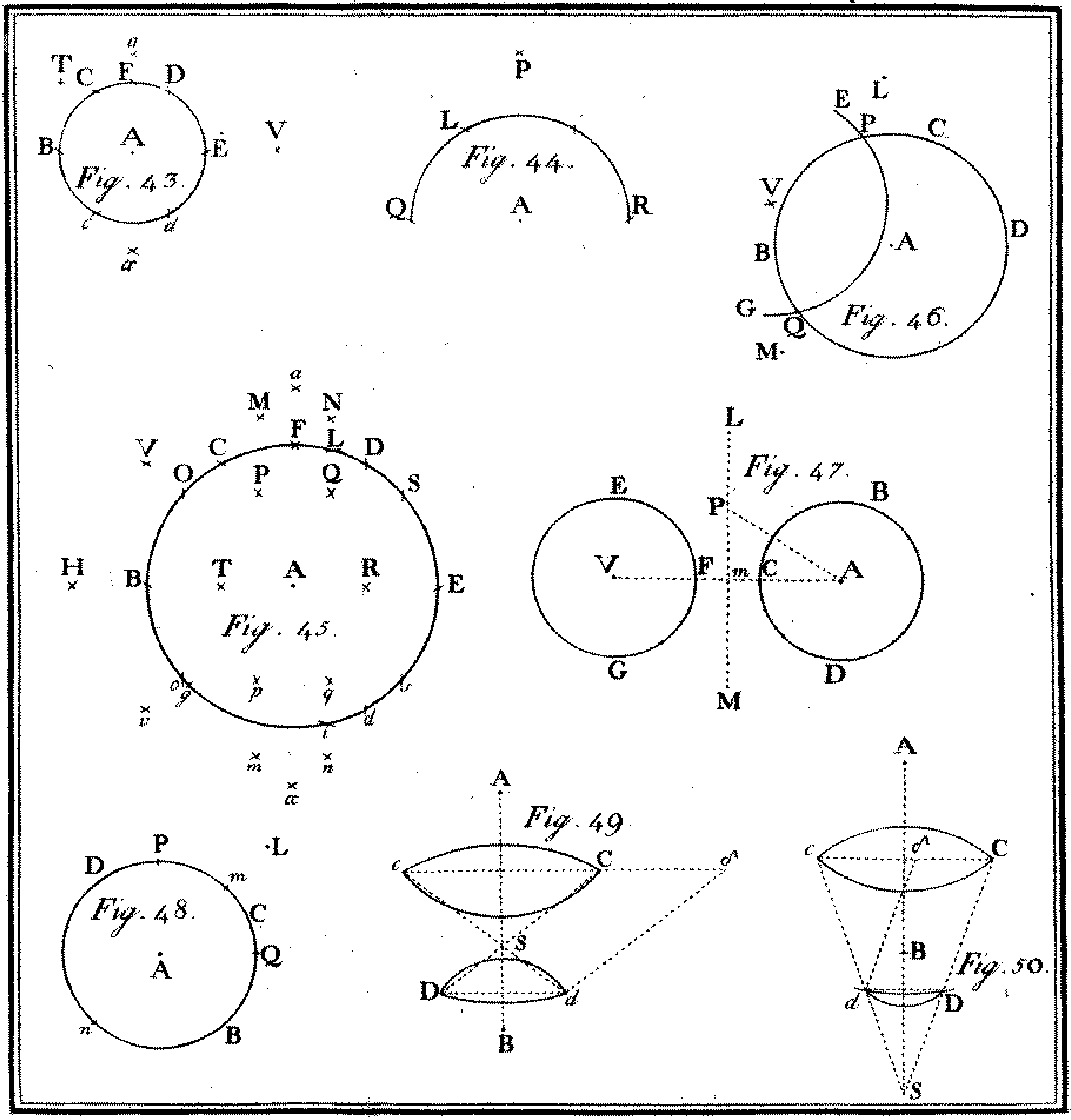


Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49
Fig. 50.

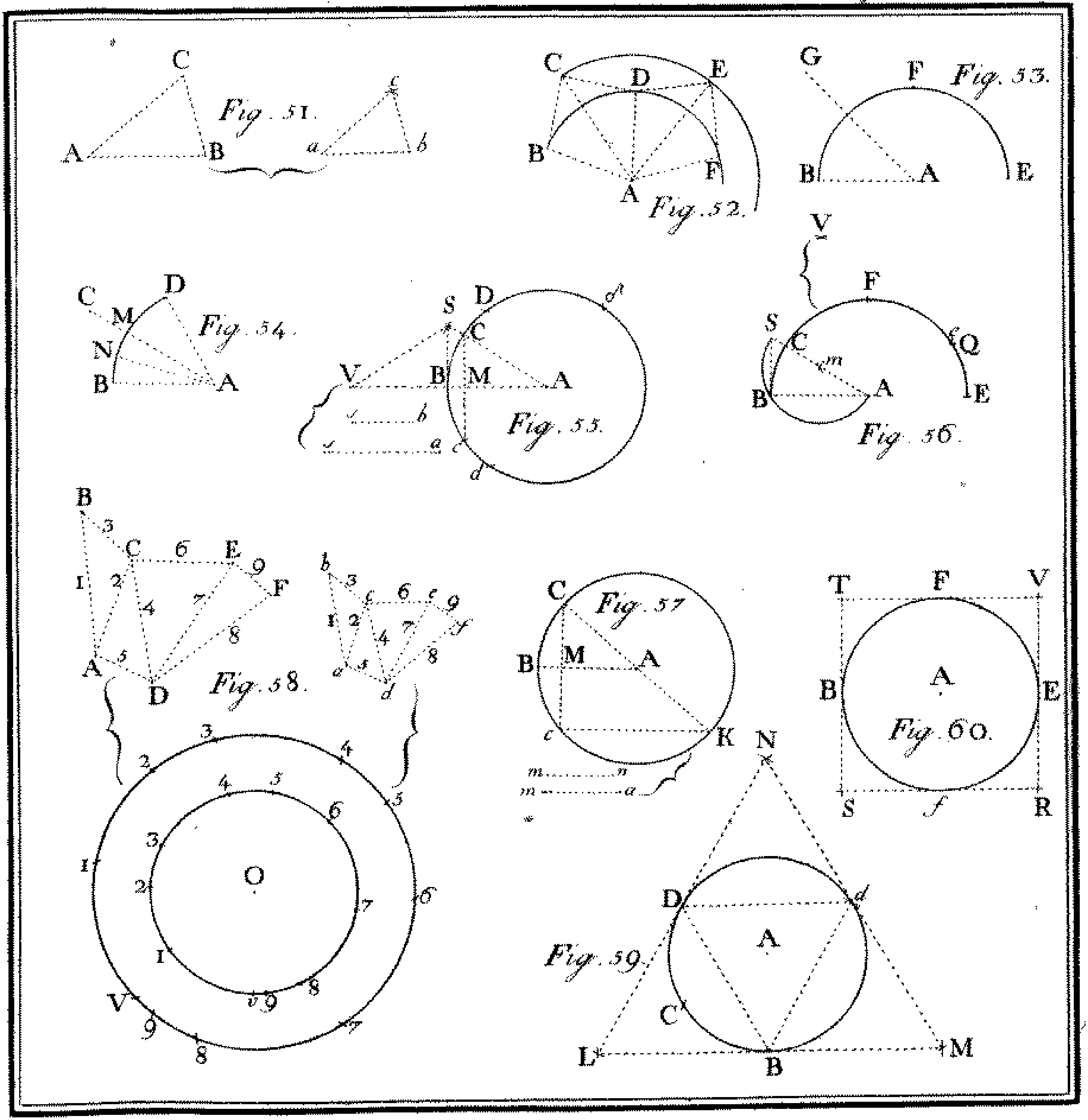


Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.

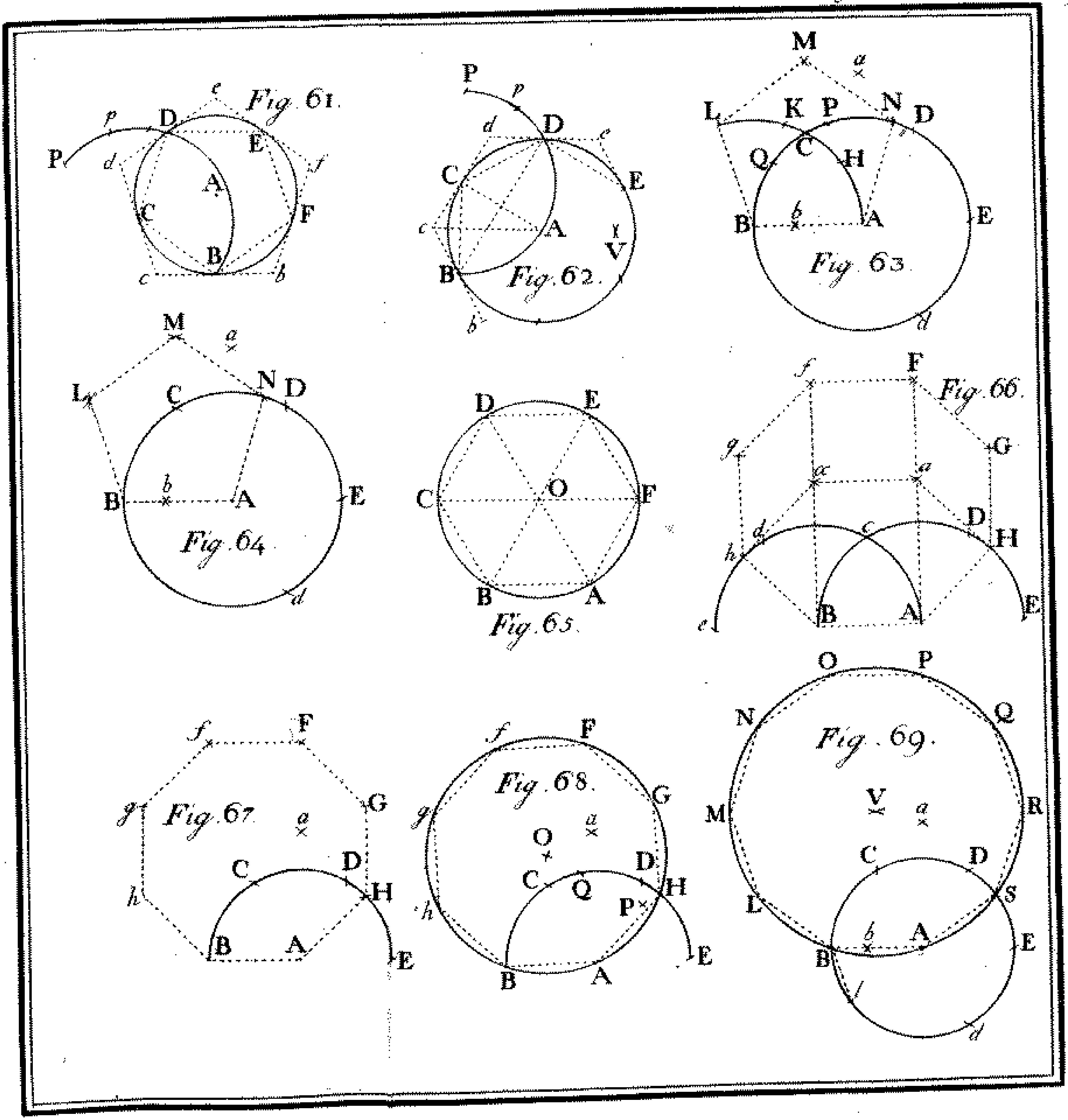


Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.

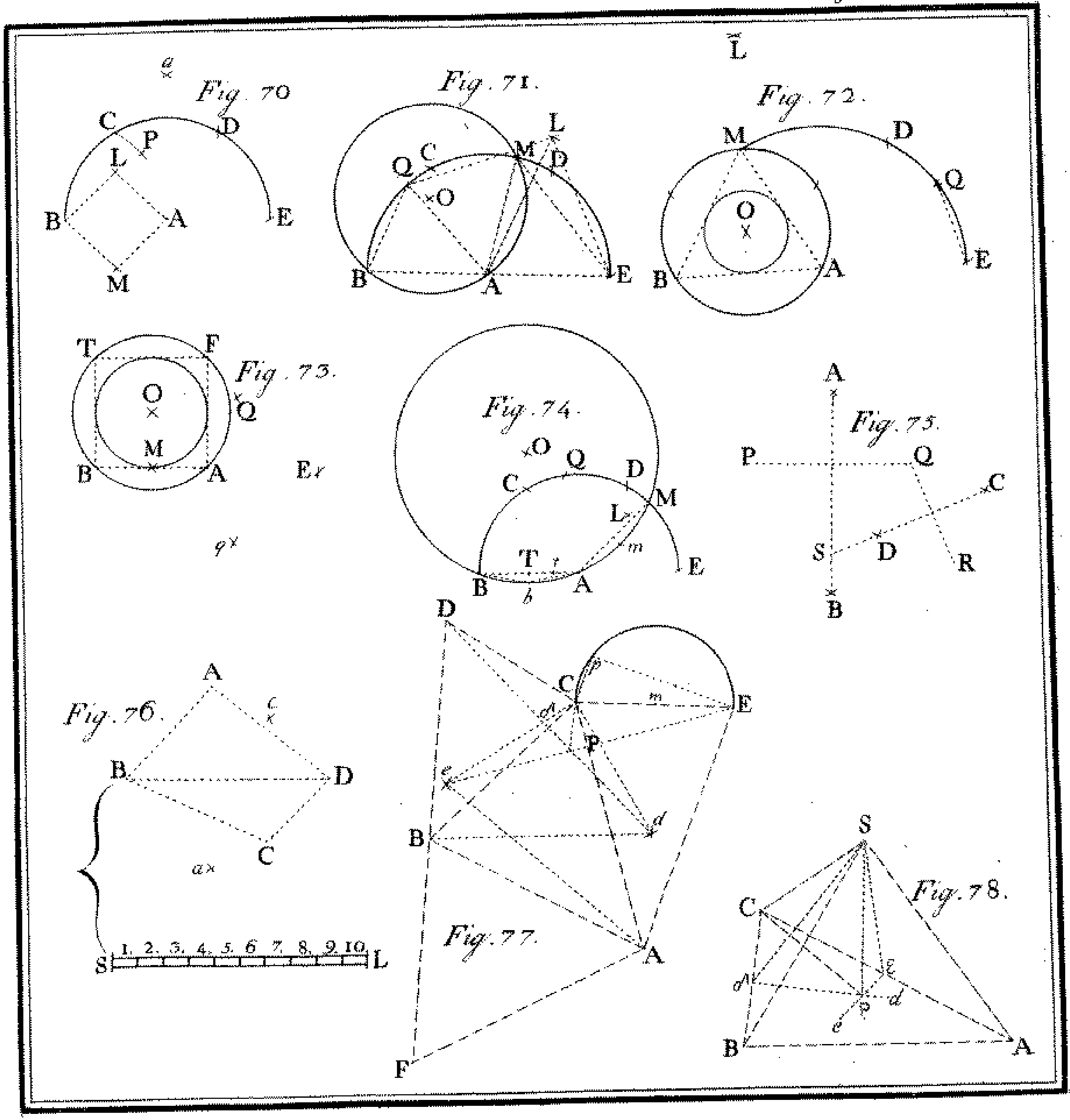


Fig. 70
a
C
P
D
L
B
A
E
M
Fig. 71.
L
Q
C
M
D
O
B
A
E
Fig. 72.
L
M
D
Q
O
B
A
E
Fig. 73.
T
F
O
Q
M
B
A
E
q
Fig. 74.
O
Q
D
C
M
L
m
T
r
E
B
b
A
Fig. 75.
A
P
Q
C
S
D
R
B
Fig. 76.
A
c
B
D
C
a
S
1. 2. 3. 4. 5. 6 7 8. 9 10
L
Fig. 77.
D
C
p
m
E
P
e
d
B
A
F
Fig. 78.
S
C
B
A
d
e

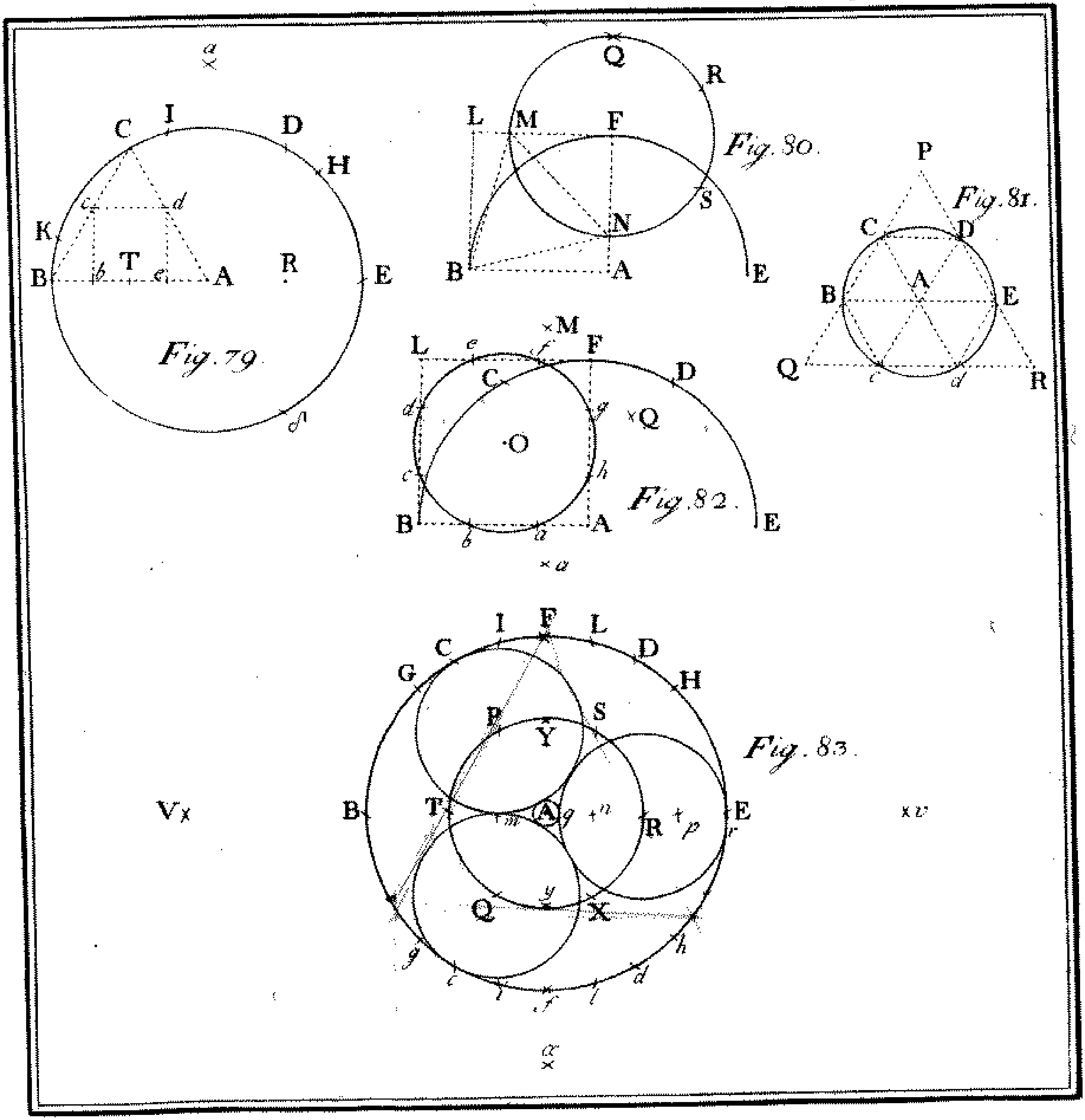


Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.

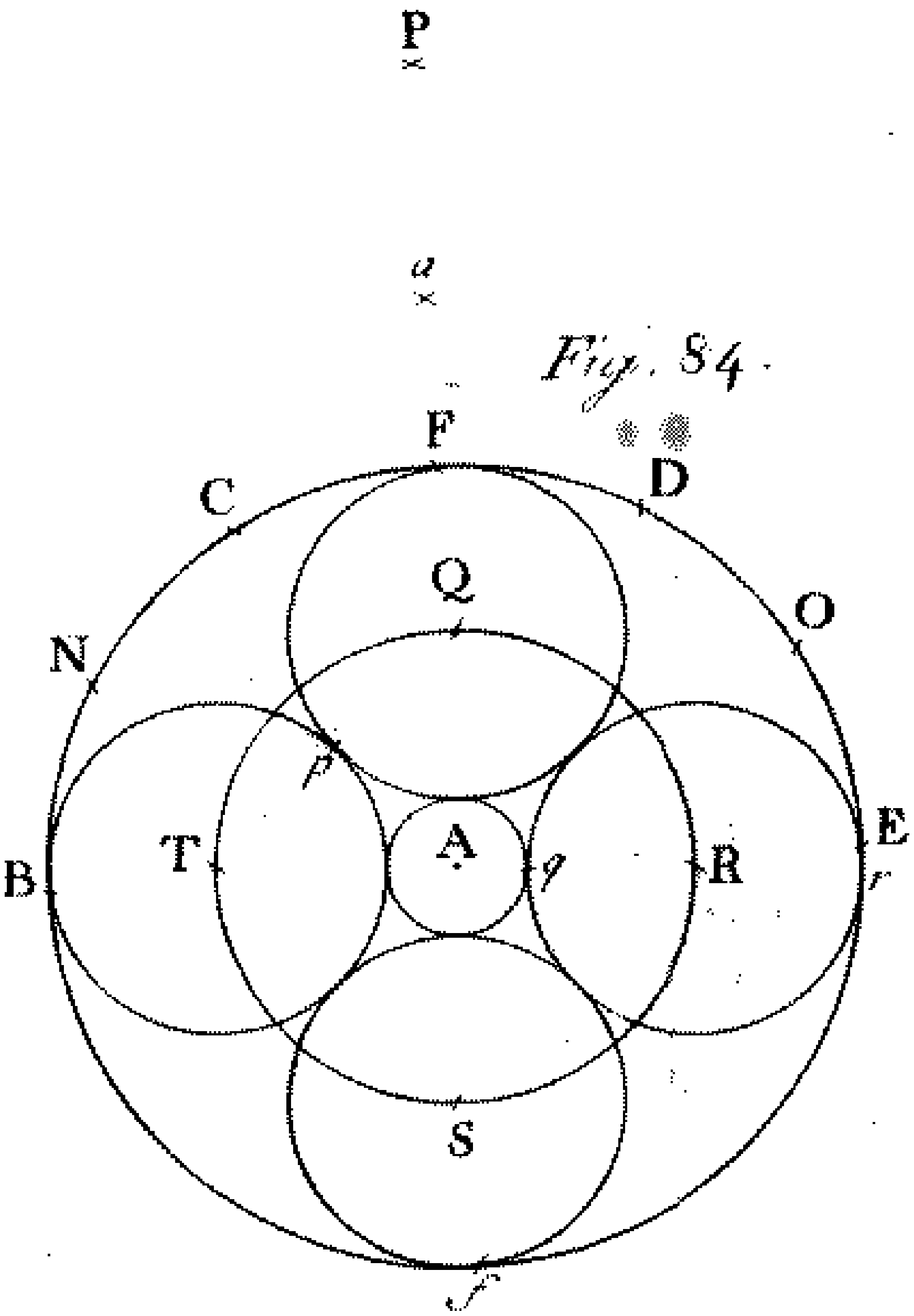


Fig. 84.

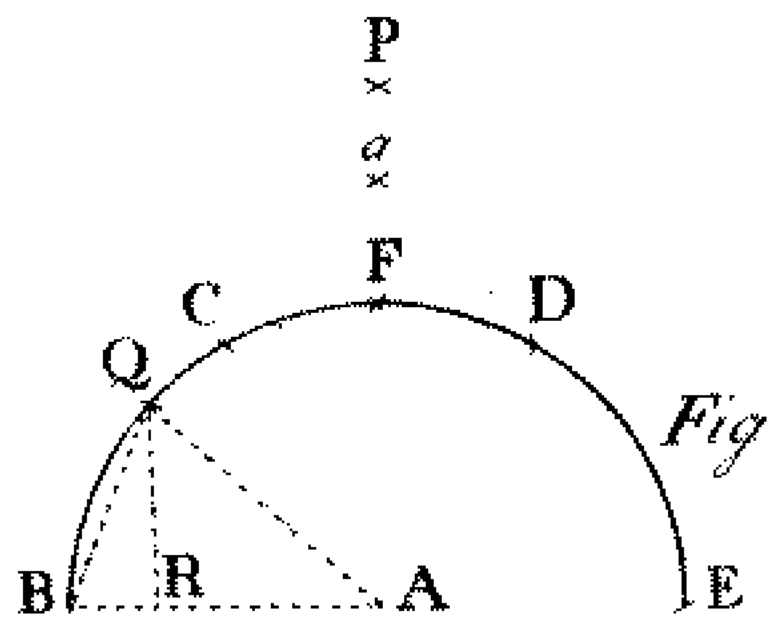


Fig. 85.

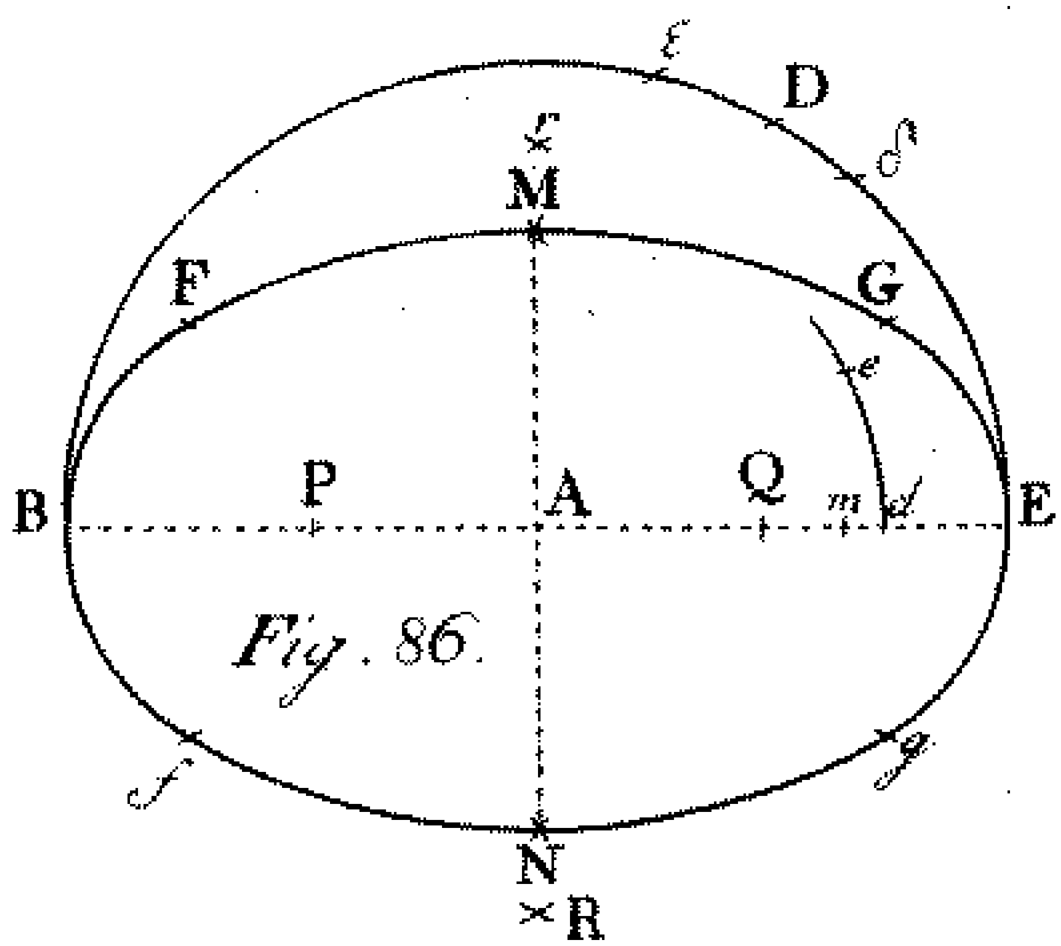


Fig. 86.

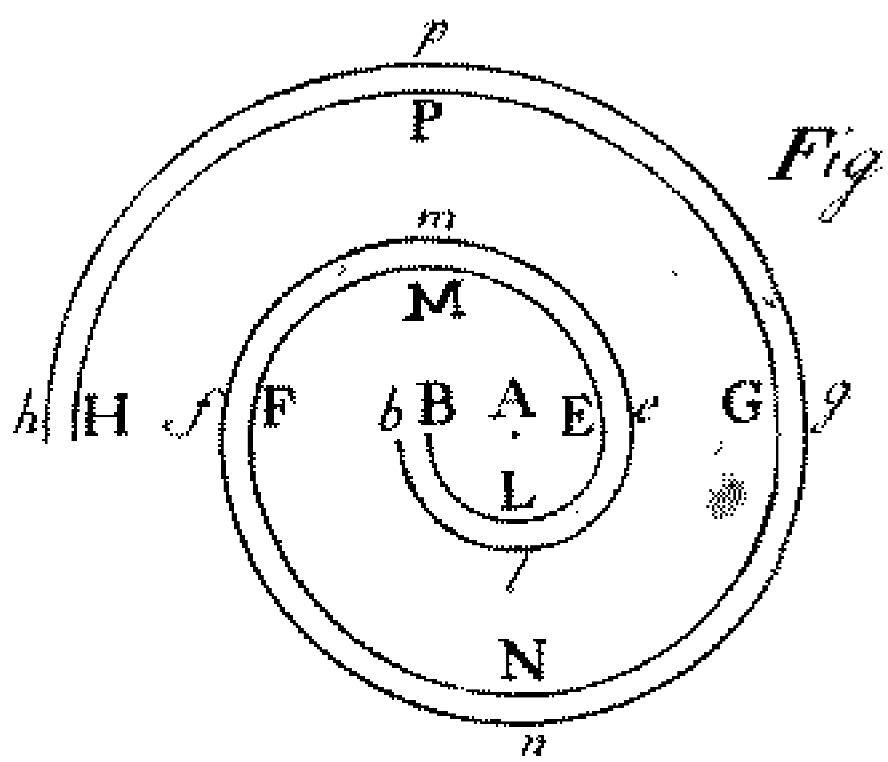


Fig. 87.

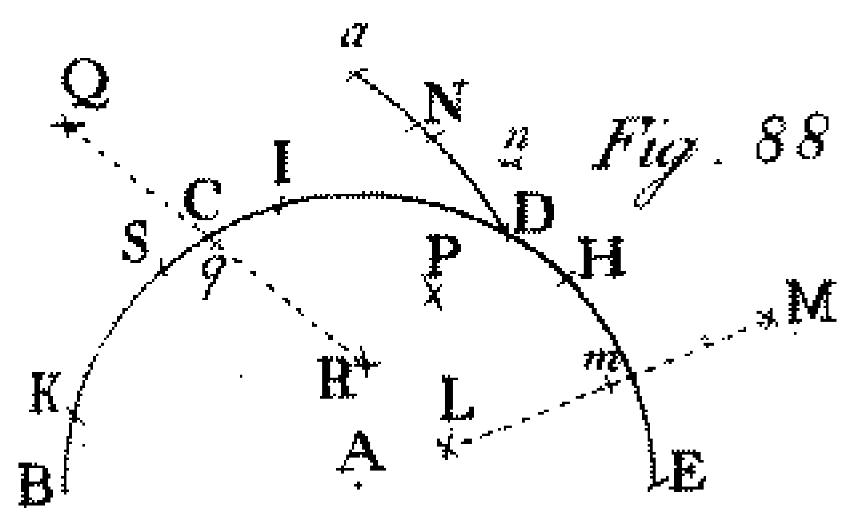


Fig. 88.

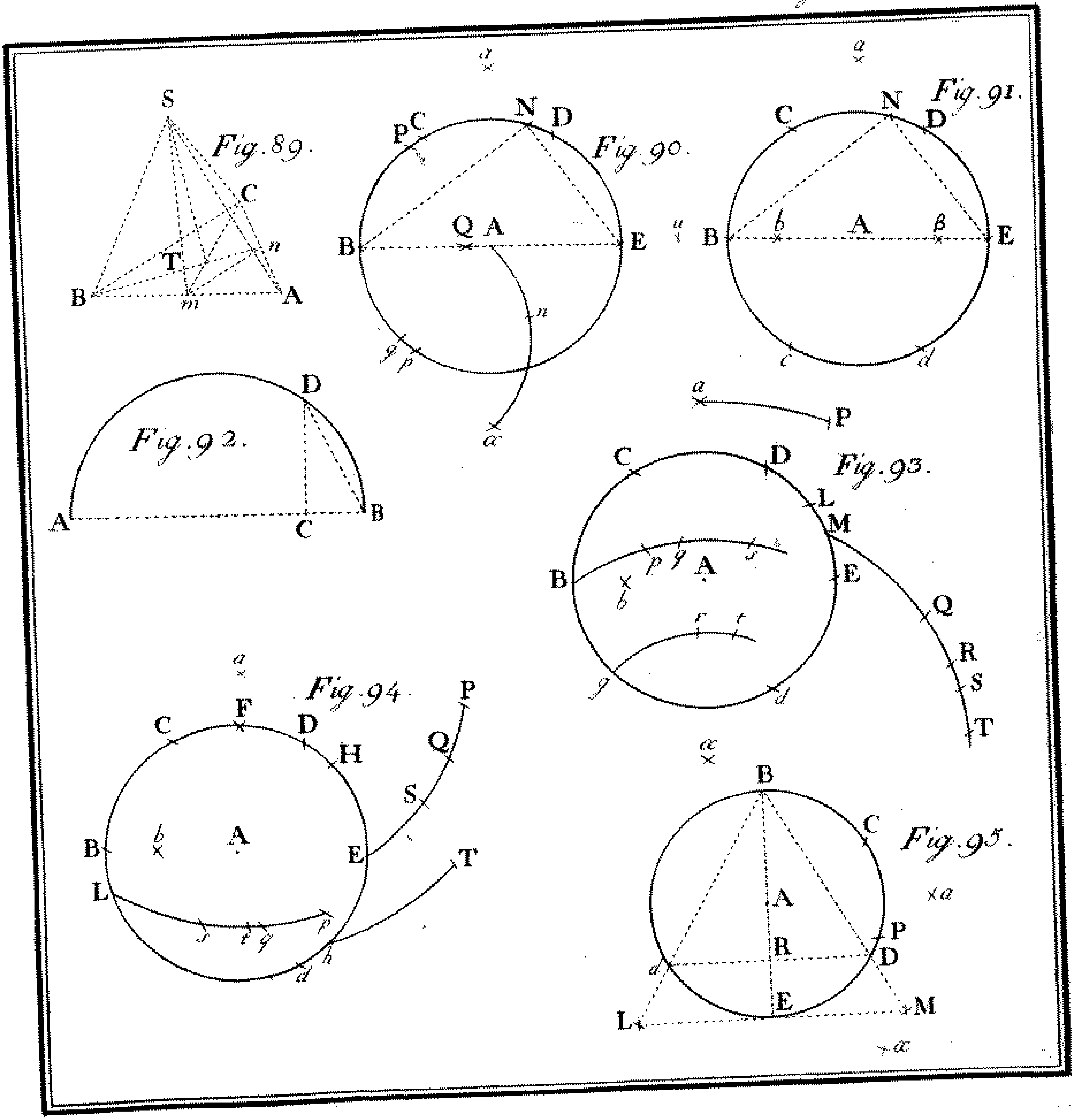


Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.

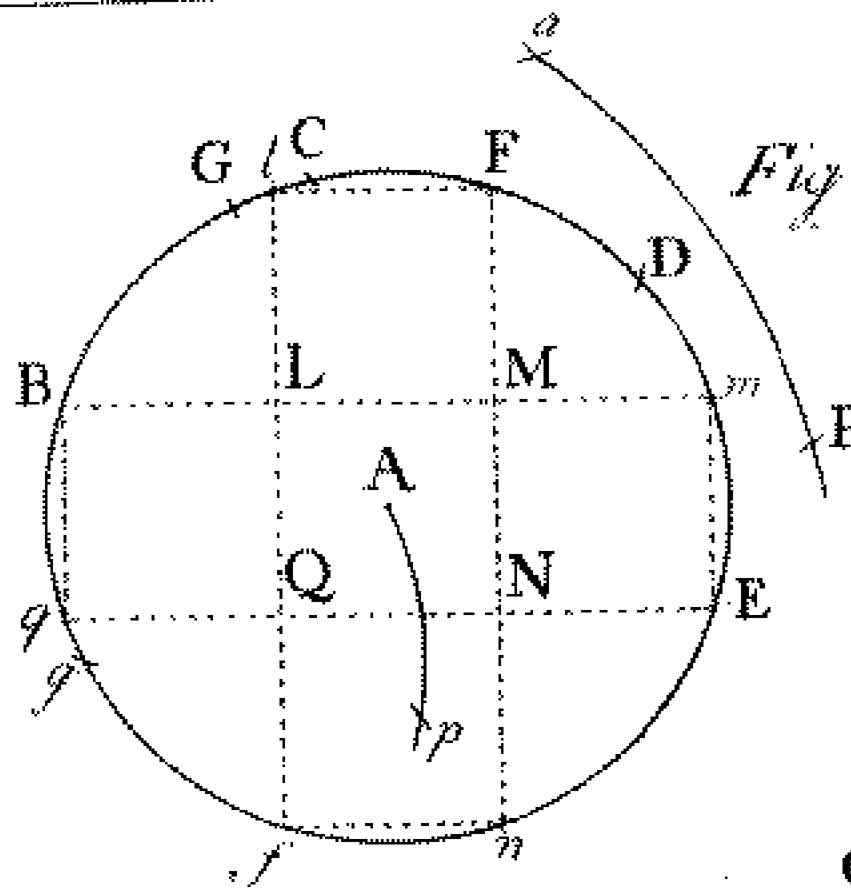


Fig. 96.

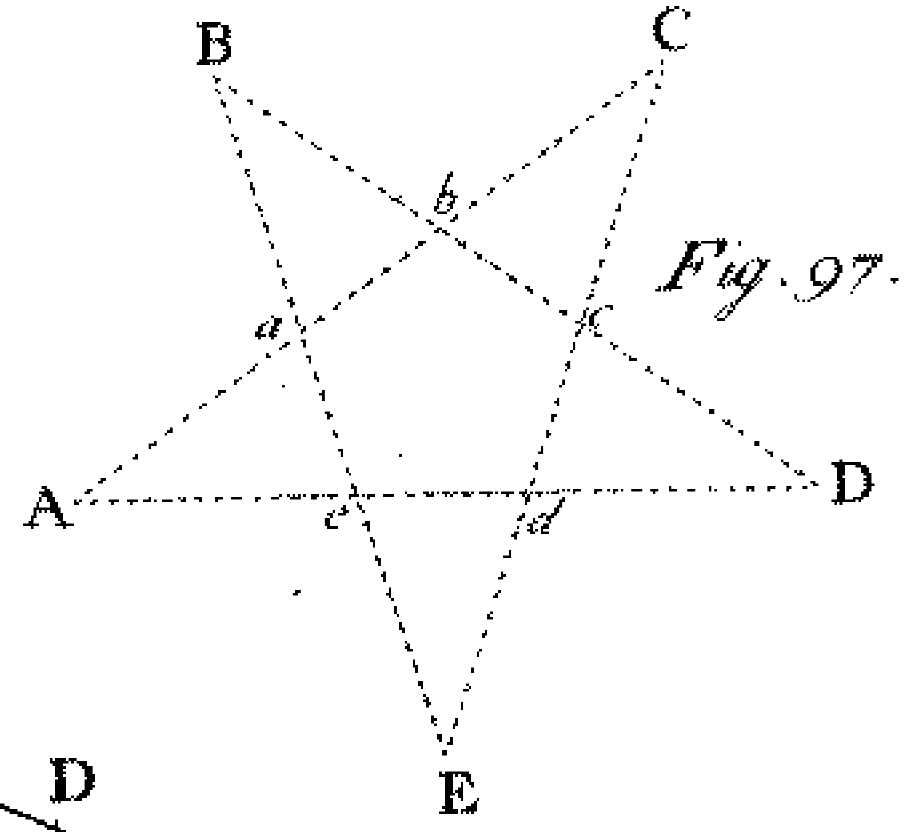


Fig. 97.

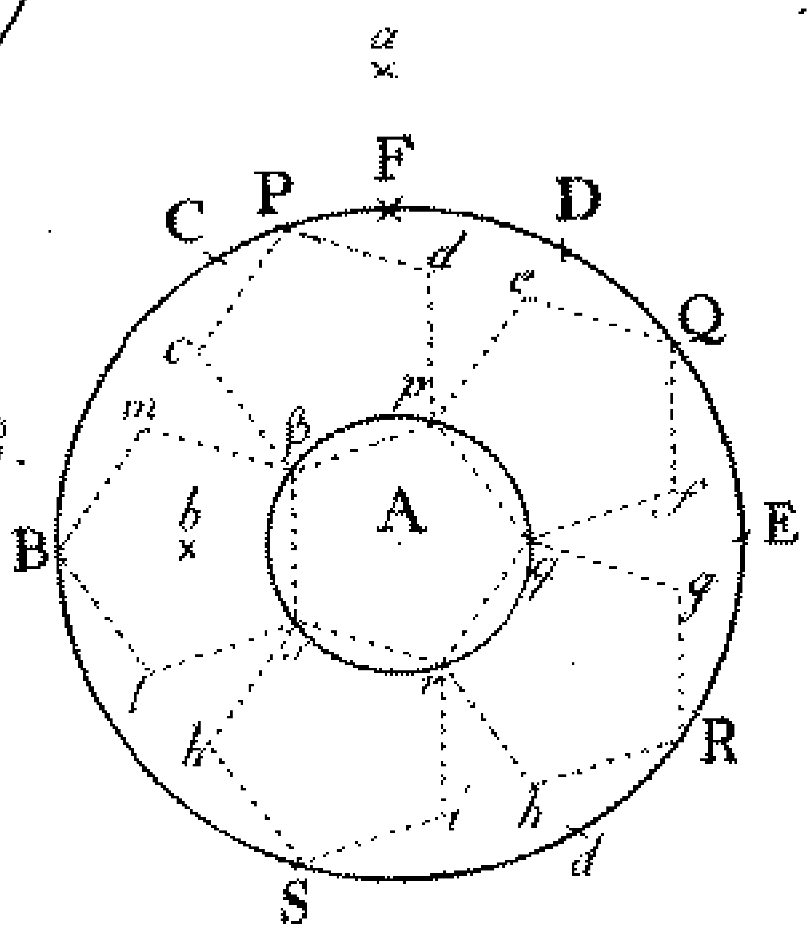


Fig. 98.

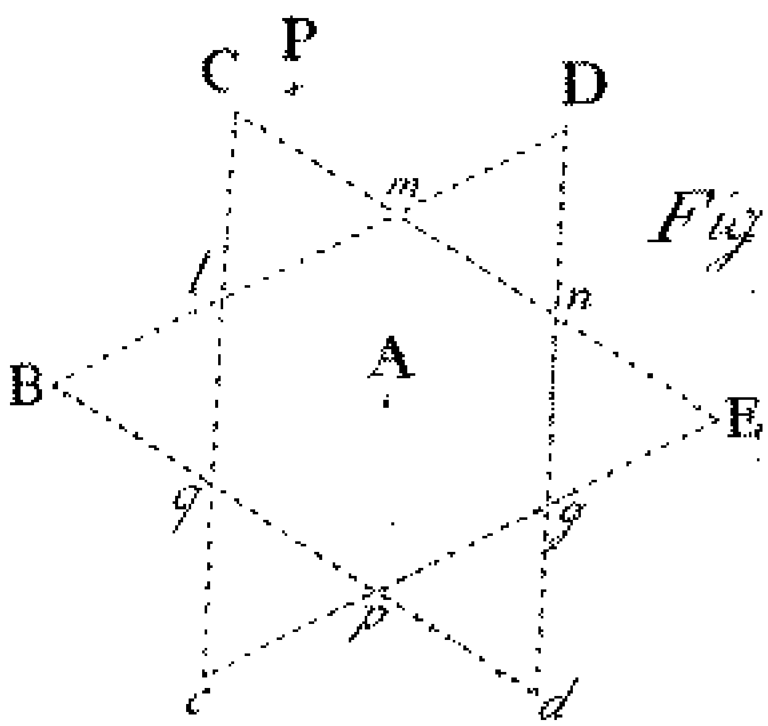


Fig. 99.

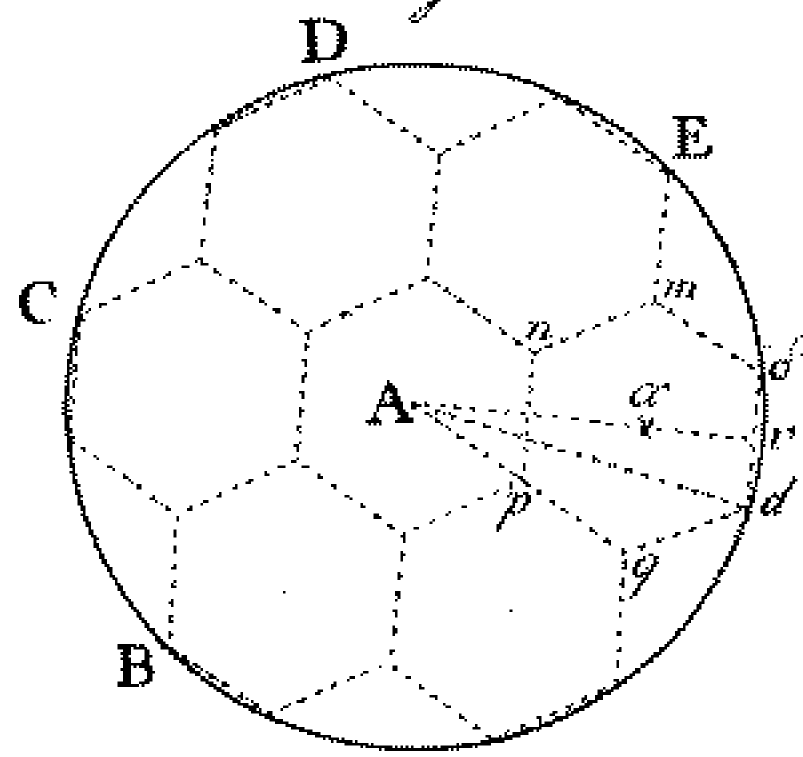


Fig. 100

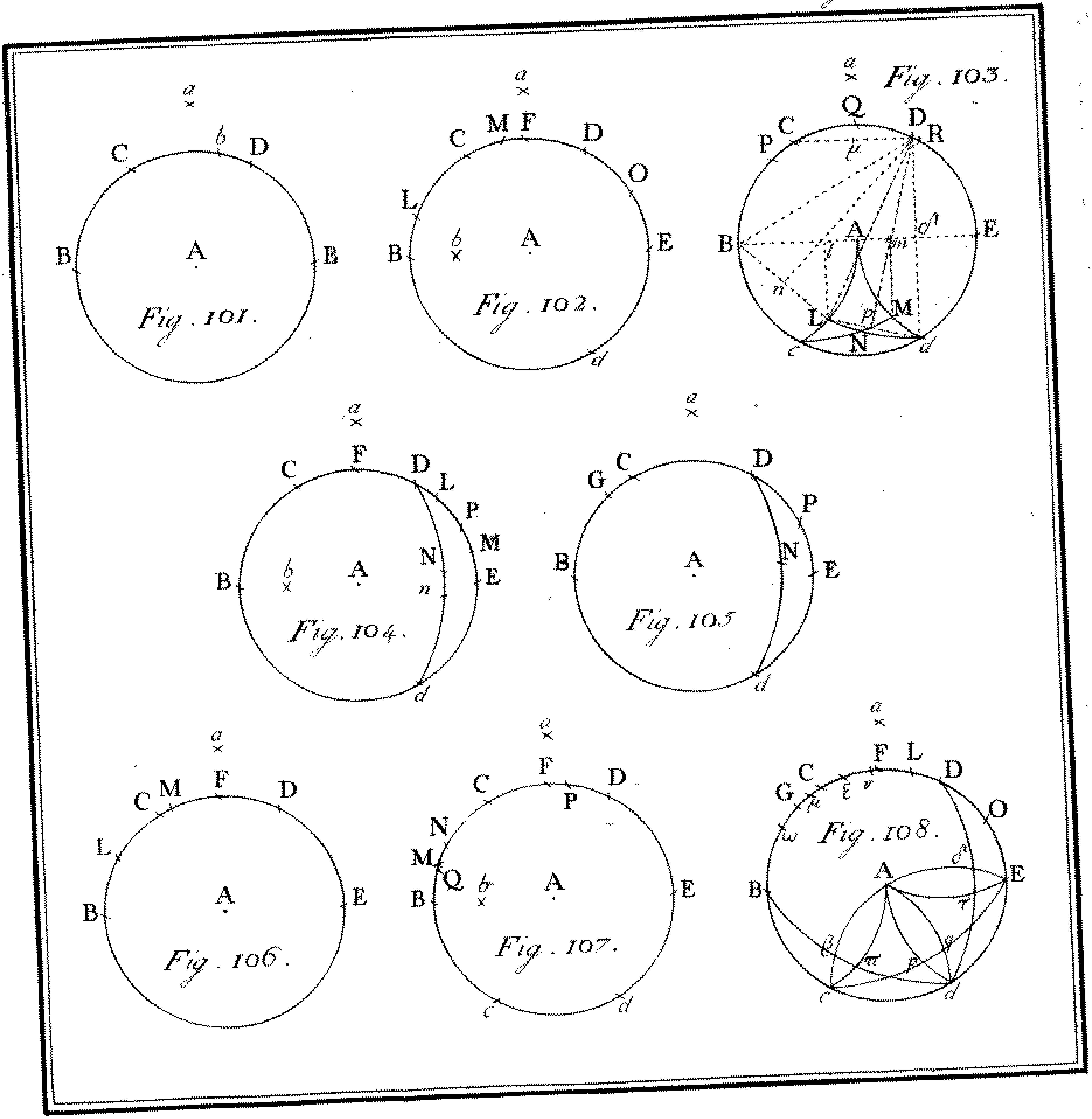


Fig. 101.
a b C D B A B
Fig. 102.
a C M F D O L E B b A d
Fig. 103.
a Q P C D R μ B A l m δ E n L p M N c d
Fig. 104.
a C F D L P M N B b A n E d
Fig. 105.
a G C D P B A N E d
Fig. 106.
a C M F D L B A E
Fig. 107.
a C F D P N M Q B b A E c d
Fig. 108.
a G C F L D μ ξ ν ω O B A δ E τ λ π ρ σ c d